

Deeltentamen A Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 14 april 2009,
9:00-12:00 uur

Dit deeltentamen bestaat uit vier opgaven. Maak iedere opgave op een apart vel. Het is bij dit tentamen niet toegestaan om een boek, aantekeningen of een grafische rekenmachine te gebruiken. Vergeet niet op elk ingeleverd vel uw naam, studentnummer en groepnummer te zetten. *Motiveer uw antwoorden. Succes!*

Opgave 1 [20pt] Vind een oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y' + \sin(x)y = \sin^3(x)$$

die voldoet aan de beginvoorwaarde $y(0) = -3$. *Hint:* $((u+1)^2 e^{-u})' = (1-u^2)e^{-u}$.

Opgave 2 [30pt] Bereken e^{xA} voor $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Opgave 3 [20pt] Beschouw het volgende stelsel van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen in het vlak:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2}y - x^2y - \frac{1}{4}y^3, \\ \dot{y} = 2x + 4x^3 + xy^2. \end{cases}$$

- Bereken alle rustpunten van dit stelsel.
- Laat zien dat iedere oplossing $(x(t), y(t))$ van het stelsel met $(x(0), y(0)) \neq (0, 0)$ periodiek is.
Hint: Onderzoek het gedrag van $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ langs de banen van het stelsel als functie van t .
- Teken zo nauwkeurig mogelijk het faseplaatje behorend bij het stelsel. Zet ook pijltjes!

Opgave 4 [30pt] Beschouw de maximale oplossing $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ van het beginwaardeprobleem

$$y' = \sin(e^y), \quad y(0) = 0.$$

- Schets de grafiek van $f(y) = \sin(e^y)$. *Hint:* Let op de nulpunten van f !
- Laat zien dat voor geen enkele $x_1 \in I$ geldt $y(x_1) = 2$. *Hint:* $\pi < e^2$.
- Bewijs dat y is gedefinieerd voor alle $x \geq 0$.
- Vind $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$.