Deeltentamen A Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 19 april 2010, 14:00-17:00 uur

Dit deeltentamen bestaat uit vier opgaven. Maak iedere opgave op een apart vel. Het is bij dit tentamen niet toegestaan om een boek, aantekeningen of een grafische rekenmachine te gebruiken. Vergeet niet op elk ingeleverd vel uw naam, studentnummer en groepnummer te zetten. Motiveer uw antwoorden. Succes!

Opgave 1 [20pt] Vind een oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{\cos x}{x^2}, \qquad x > 0,$$

die voldoet aan de beginvoorwaarde $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Opgave 2 [30pt] Zij A een $n \times n$ reële matrix zó dat $A^2 = \alpha A$ met $\alpha \neq 0$.

(a) Bewijs dat $e^{xA} = E + \left(\frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha}\right) A$.

(b) Bereken e^{xA} voor $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Opgave 3 [20pt] Beschouw de maximale oplossing $y : I \to \mathbb{R}$ van het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{4 - \sin^2 x}\,(4 - y^2)\,, \quad y(0) = 1\,.$$

(a) Laat zien dat voor geen enkele $x_1 \in I$ geldt $y(x_1) = 2$.

Hint: Denk aan de eenduidigheid van de oplossingen.

(b) Laat zien dat voor geen enkele $x_2 \in I$ geldt $y(x_2) = \sin x_2$.

(c) Concludeer met (a) en (b) dat $\sin x < y(x) < 2$ voor alle $x \in I$.

(d) Bewijs dat $I = \mathbb{R}$.

Z.O.Z.

Opgave 4 [30pt] Beschouw het volgende stelsel van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen in het vlak:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -1 - y + x^2, \\ \dot{y} &= x + xy \; . \end{cases} \tag{1}$$

Zij $t \mapsto (x(t), y(t)), t \in I(x_0, y_0)$, de maximale oplossing van (1) met $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Een deelverzameling $M \subset \mathbb{R}^2$ heet *invariant* voor (1) als $(x_0, y_0) \in M$ impliceert dat $(x(t), y(t)) \in M$ voor alle $t \in I(x_0, y_0)$.

(a) Bereken alle rustpunten van (1).

(b) Laat zien dat de lijn $M_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1\}$ invariant is voor (1).

(c) Bewijs met (a) en (b) dat (1) geen periodieke oplossingen heeft.

Hint: Binnen iedere verzameling begrensd door een gesloten baan bestaat er een rustpunt.

(d) Laat zien dat ook de cirkel $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ invariant is voor (1).

Hint: Onderzoek het gedrag van $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ langs de banen van het stelsel als functie van t.

(e) Teken zo nauwkeurig mogelijk het faseplaatje behorend bij het stelsel. Zet ook pijltjes!