Uitwerking deeltentamen A Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 19 april 2010

Opgave 1 [20pt] Vind een oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{\cos x}{x^2}\ , \quad x > 0,$$

die voldoet aan de beginvoorwaarde $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Methode I: De functie

$$z(x) = \frac{1}{x^2}$$

voldoet voor $x > 0$ aan de homogene differentiaalvergelijking

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2z}{x}\ .$$

Bovendien geldt dat $z\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$.

Met de methode van variatie van constanten zoeken we de oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking in de vorm

$$y(x) = C(x)z(x)$$

waarin $C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. De substitutie levert:

$$\frac{C'}{x^2} - \frac{2C}{x^3} + \frac{2C}{x^3} = \frac{\cos x}{x^2}$$

ofwel

$$C'(x) = \cos x$$

waaruit volgt dat

$$C(x) = C\left(\frac{\pi}{2}\right) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cos\xi d\xi = 0 + \sin\xi|_{\frac{\pi}{2}}^{x} = \sin x - 1\ .$$

Dus

$$y(x) = \frac{\sin x - 1}{x^2}\ ,\ x > 0\ .$$

Methode II: De vergelijking is voor x ¿ 0 equivalent met

$$x^2y' + 2xy = \cos x$$

ofwel

$$\frac{d}{dx}(x^2y) = \cos x\ .$$

De integratie daarvan levert

$$x^2y = \sin x + C\ ,$$

waaruit volgt dat

$$y = \frac{\sin x + C}{x^2}$$

met een constante C. Uit de beginvoorwaarde $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ krijgen we $C = -1$, dus

$$y(x) = \frac{\sin x - 1}{x^2}\ ,\ x > 0\ .$$

Opgave 2 [30pt] Zij A een $n \times n$ reële matrix zó dat $A^2 = \alpha A$ met $\alpha \neq 0$.

(a) Bewijs dat $e^{xA} = E + \left(\dfrac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha}\right) A$.

Per definitie

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k = E + xA + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k \ .$$

Beschouw een term

$$\frac{x^k}{k!} A^k$$

met $k \geq 2$. Wegens $A^2 = \alpha A$ geldt

$$A^k = A^{k-2} A^2 = A^{k-2} \alpha A = \alpha A^{k-1}$$

zodat

$$A^k = \alpha A^{k-1} = \ldots = \alpha^{k-1} A$$

voor $k \geq 2$. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} e^{xA} &= E + xA + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \alpha^{k-1} A \ = \ E + xA + \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{k!} \right) A \\ &= E + \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{k!} \right) A \ = \ E + \left(\frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha} \right) A \ . \end{aligned}$$

(b) Bereken e^{xA} voor $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Er geldt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -A \ .$$

Stap (a) geeft dan met $\alpha = -1$:

$$e^{xA} = E + A - e^{-x} A = \begin{pmatrix} 1 & -e^{-x} + 1 & -e^{-x} + 1 \\ -e^{-x} + 1 & 1 & -e^{-x} + 1 \\ e^{-x} - 1 & e^{-x} - 1 & -1 + 2e^{-x} \end{pmatrix} .$$

Opgave 3 [20pt] Beschouw de maximale oplossing $y : I \to \mathbb{R}$ van het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{4 - \sin^2 x} \, (4 - y^2) \ , \quad y(0) = 1 \ . \tag{1}$$

(a) Laat zien dat voor geen enkele $x_1 \in I$ geldt $y(x_1) = 2$.
Hint: Denk aan de eenduidigheid van de oplossingen.

De functie

$$f(x,y) = \frac{\cos x}{4-\sin^2 x}\,(4-y^2)$$

is continu in (x,y) en continu-differentieerbaar en dus lokaal Lipschitz-continu in y, zodat het beginwaardeprobleem $y' = f(y),\ y(x_0) = y_0$, een maximale eenduidige oplossing heeft voor iedere (x_0, y_0).

Omdat $f(x,2) \equiv 0$, voldoet de constante functie $x \mapsto 2$ aan de differentiaalvergelijking $y' = f(x,y)$. Veronderstel dat $y(x_1) = 2$ voor een $x_1 \in I$. Dan heeft de vergelijking twee verschillende oplossingen, $x \mapsto y(x)$ en $x \mapsto 2$, die dezelfde waarde $y = 2$ in het punt x_1 aannemen, tegenspraak. Dus $y(x) \neq 2$ voor alle $x \in I$.

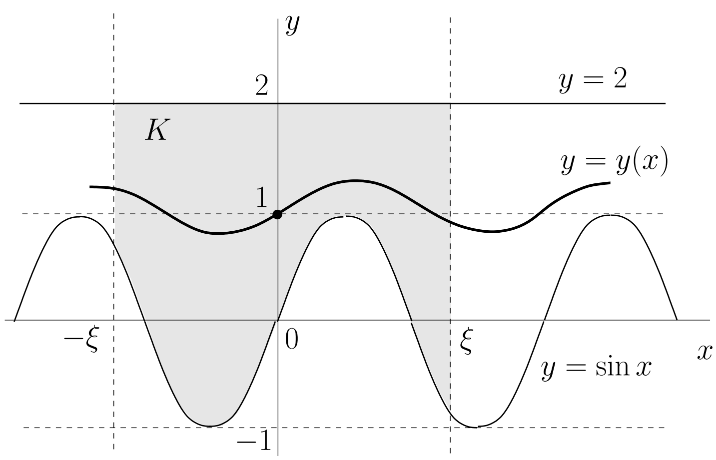
(b) Laat zien dat voor geen enkele $x_2 \in I$ geldt $y(x_2) = \sin x_2$.

De functie $y_2(x) = \sin x$ voldoet ook aan de differentiaalvergelijking $y' = f(x,y)$. Veronderstel dat $y(x_2) = \sin x_2$ voor een $x_2 \in I$. Dan heeft de vergelijking twee verschillende oplossingen, $x \mapsto y(x)$ en $x \mapsto y_2(x) = \sin x$, die dezelfde waarde $y = \sin x_2$ in het punt x_2 aannemen, tegenspraak. Dus $y(x) \neq \sin x$ voor alle $x \in I$.

(c) Concludeer met (a) en (b) dat $\sin x < y(x) < 2$ voor alle $x \in I$.

Er geldt dat $\sin 0 < y(0) < 2$. Hieruit volgt dat $\sin x < y(x) < 2$ voor alle $x \in I$.

(d) Bewijs dat $I = \mathbb{R}$.



De maximale oplossing $y : I \to \mathbb{R}$ van het probleem (1) is gedefinieerd voor alle kleine $|x|$ en kan voortgezet woorden tot de rand van de begrensde en gesloten deelverzameling

$$K = \{(x,y) : -\xi \leq x \leq \xi,\ \sin x \leq y \leq 2\} \subset \mathbb{R}^2$$

met willekeurige $\xi > 0$.

Deze oplossing kan niet K verlaten door de zijde $y = 2$ (wegens (a)). Ook kan deze oplossing K niet verlaten door de zijde met $y = \sin x$ (wegens (b)).

Dus verlaat de oplossing y de deelverzameling K door de zijden $x = \pm\xi$ en is dus gedefinieerd voor $-\xi \le x \le \xi$. Omdat $\xi > 0$ willekeurig is, is de maximale oplossing gedefinieerd voor alle $x \in \mathbb{R}$, d.w.z $I = \mathbb{R}$.

Opgave 4 [30pt] Beschouw het volgende stelsel van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen in het vlak:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -1 - y + x^2, \\ \dot{y} & = & x + xy \ . \end{array} \right. \tag{2}$$

Zij $t \mapsto (x(t), y(t)), t \in I(x_0, y_0)$, de maximale oplossing van (2) met $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Een deelverzameling $M \subset \mathbb{R}^2$ heet *invariant* voor (2) als $(x_0, y_0) \in M$ impliceert dat $(x(t), y(t)) \in M$ voor alle $t \in I(x_0, y_0)$.

(a) Bereken alle rustpunten van (2).

Beschouw het stelsel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -1 - y + x^2 & = & 0, \\ x + xy & = & 0, \end{array} \right. \tag{3}$$

voor de coördinaten van rustpunten. De eerste vergelijking is equivalent met $y = x^2 - 1$. Samen met de tweede vergelijking impliceert dit dat

$$x^3 = 0.$$

Dus is $(x, y) = (0, -1)$ de einige oplossing van (3). Het stelsel (2) heeft dus één rustpunt P met $x = 0, y = -1$.

(b) Laat zien dat de lijn $M_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1\}$ invariant is voor (2).

Neem een oplossing $(x(t), y(t))$ van (2) met $(x_0, y_0) \in M_0$. De functie $y(t)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\dot{y}(t) = x(t)(1 + y(t)), \quad t \in I(x_0, y_0) \ ,$$

met de beginvoorwaarde $y(0) = y_0 = -1$. Dit beginwaardeprobleem heeft een uniek constante oplossing: $y(t) \equiv -1$ voor alle $t \in I(x_0, y_0)$. Dus $(x(t), y(t)) = (x(t), -1) \in M_0$ voor alle $t \in I(x_0, y_0)$.

(c) Bewijs met (a) en (b) dat (2) geen periodieke oplossingen heeft.

Hint: Binnen iedere verzameling begrensd door een gesloten baan bestaat er een rustpunt.

Stel dat (2) een periodieke oplossing heeft met periode $0 < T < \infty$. De bijbehorende gesloten baan moet het einige rustpunt $(x, y) = (0, -1)$ omcirkelen en dus de lijn M_0 minstens twee keer passeren. Maar dat kan niet wegens uniciteit omdat M_0 bestaat uit banen van (2). Dus kan (2) geen periodieke oplossingen hebben.

(d) Laat zien dat ook de cirkel $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ invariant is voor (2).

Hint: Onderzoek het gedrag van $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ langs de banen van het stelsel als functie van t.

Neem een oplossing $(x(t), y(t))$ van (2) met $(x_0, y_0) \in M_1$. Bereken de afgeleide van de functie $G(t) = g(x(t), y(t))$ naar t:

$$\dot{G} = \frac{\partial g}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial g}{\partial y}\dot{y} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2(-x - xy + x^3 + xy + xy^2) = 2x(x^2 + y^2 - 1) = 2xg(x, y) = 2xG.$$

Dus voldoet de functie $G(t)$ aan de differentiaalvergelijking

$$\dot{G}(t) = 2x(t)G(t), \quad t \in I(x_0, y_0) ,$$

met de beginvoorwaarde $G(0) = x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$. Dit beginwaardeprobleem heeft een uniek constante oplossing: $G(t) \equiv 0$ voor alle $t \in I(x_0, y_0)$. Dus $(x(t), y(t)) \in M_1$ voor alle $t \in I(x_0, y_0)$.

(e) Teken zo nauwkeurig mogelijk het faseplaatje behorend bij het stelsel. Zet ook pijltjes!

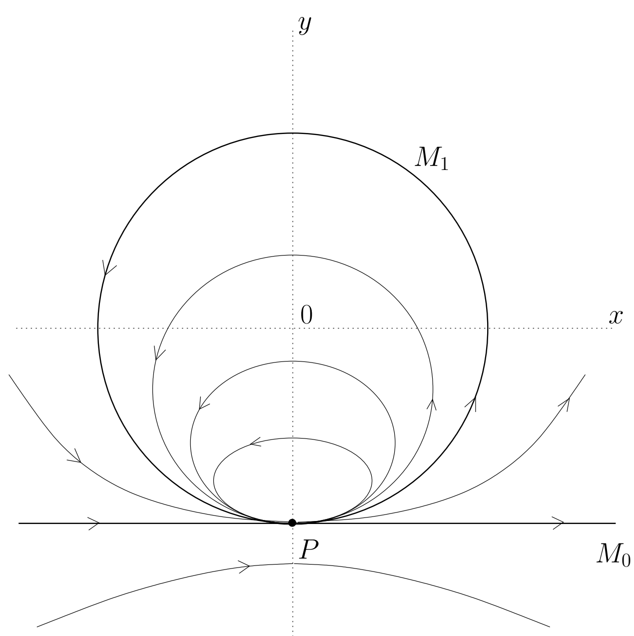
Het faseplaatje is symmetrisch t.a.v. de verticale as $x = 0$, omdat de substitutie $(x, y, t) \to (-x, y, -t)$ het stelsel (2) niet verandert.

De lijn M_0 en de cirkel M_1 zijn invariant. Het enige rustpunt P is gelijk aan $(0, -1) = M_0 \cap M_1$.

De verzameling $M_0 \setminus P$ bestaat uit twee banen met resp. $x < 0$ en $x > 0$. De één-dimensionale verzameling $M_1 \setminus P$ bevat geen rustpunten en is dus één baan die naar P gaat als $t \to \pm\infty$.

Omdat geen periodieke banen bestaan, gaat iedere begrensde baan naar P als $t \to \pm\infty$ (wegens de stelling van Poincaré-Bendixson). Verder zien we dat iedere baan met (x_0, y_0) zo dat $x_0^2 + y_0^2 < 1$ begrensd is (omdat de cirkel M_1 niet kan passeren).

Voor $y < -1$, hebben we $\dot{x} > 0$, zodat daar alle banen monotoon naar rechts gaan.



Opmerking: Men kan bewijzen dat iedere ellips

$$E_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a \sin\varphi,\ y = -1 + a^2(1 + \cos\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]\}, \quad a > 0,$$

invariant is voor (2). Hieruit volgt dat iedere baan met $y_0 > -1$ een ellips E_a traceert en naar P gaat als $t \to \pm\infty$. Merk op dat $E_1 = M_1$.