

## Tentamen differentiaalvergelijkingen 24 juni 2013

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook de naam van je werkcollegeleider:
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- *SUCCES!*

1. [35] Beschouw op  $\mathbb{R}^2$  het door  $V(x, y) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2)$  gegeven gradiënt-vectorveld

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

- (i) Geef alle evenwichtspunten  $(x_0, y_0)$ . 0.7
- (ii) Bereken de linearizeringen in de evenwichtspunten en de eigenwaarden. 0.7
- (iii) Bepaal de types van de evenwichtspunten, in het bijzonder hun stabiliteit. 0.7
- (iv) Ga na dat  $(x_0, y_0) + E_\lambda$  voor alle zadelpunten  $(x_0, y_0)$  en hun eigenruimten  $E_\lambda$  onder de stroming invariant is. 0.7
- (v) Schets het faseplaatje. 0.7

2. [35] Beschouw op  $\mathbb{R}^2$  het door  $H(q, p) = q^4 - 2q^2 + 2p^2 - p^4$  gegeven Hamiltoniaanse vectorveld

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}.$$

- (i) Geef alle evenwichtspunten  $(q_0, p_0)$ . 0.7
- (ii) Bereken de linearizeringen in de evenwichtspunten en de eigenwaarden. 0.7
- (iii) Bepaal de types van de evenwichtspunten, in het bijzonder hun stabiliteit. 0.7
- (iv) Ga na dat  $(0, 0) + E_\lambda$  voor de twee eigenruimten  $E_\lambda$  onder de stroming invariant is. 0.7
- (v) Schets het faseplaatje. 0.7

3. [15] Beschouw het vectorveld

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -(y_1^2 + y_2^2)y_2 \\ \dot{y}_2 = (y_1^2 + y_2^2)y_1 \end{cases} \quad (1)$$

op  $\mathbb{R}^2$ .

- (i) Substitueer poolcoördinaten  $y_1 = \rho \cos \vartheta$ ,  $y_2 = \rho \sin \vartheta$  en bereken het vectorveld in deze coördinaten. 0.5
- (ii) Los het zo verkregen systeem van differentiaalvergelijkingen op. 0.5
- (iii) Bepaal de stroming  $\varphi_t$  van (1). 0.5

4. [15] Beschouw op  $[0, 1]$  de inhomogene lineaire 2de orde differentiaalvergelijking

$$\ddot{y} - \frac{\dot{y}}{1+t} + 4(1+t)^2 y = \sin((1+t)^2) \quad (2)$$

met variabele coëfficiënten.

- (i) Verifieer dat  $\sin((1+t)^2)$  de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking oplost. 0.5
- (ii) Bepaal een fundamentele matrix voor het bijbehorende (homogene) lineaire systeem van 1ste orde differentiaalvergelijkingen. 0.5
- (iii) Geef de algemene oplossing van (2). 0.5