Tentamen differentiaalvergelijkingen 15 april 2015

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook de naam van je werkcollegeleider:

- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Alle 15 deelopgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Beschouw op $\mathbb{R}^3$ het lineaire systeem $\dot{y} = Ay$ met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

(*i*) Bereken de eigenwaarden van A.

(*ii*) Geef de Jordan-normaalvorm van A en een basis ten opzichte waarvan A in deze Jordan-normaalvorm is.

(*iii*) Bepaal de algemene oplossing $y(t)$ van $\dot{y} = Ay$.

(*iv*) Voor welke beginvoorwaarden $y^0 \in \mathbb{R}^3$ geldt $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{tA} y^0 = 0$?

(*v*) Laat zien dat

$$\left\{ y^0 \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{tA} y^0 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} .$$

(z.o.z.)

2. Beschouw op $\mathbb{R}^2$ het systeem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x-1)\,y & \text{(1a)} \\ \dot{y} &= x(x+1)(y^2-1) & \text{(1b)} \end{aligned}$$

van differentiaalvergelijkingen.

(*i*) Geef alle evenwichtspunten (x_0, y_0).

(*ii*) Bereken de lineariseringen in de evenwichtspunten en de eigenwaarden.

(*iii*) Bepaal de types van de evenwichtspunten en voor reële eigenwaarden ook de bijbehorende eigenruimten.

(*iv*) Ga na dat de rechte lijn $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\}$ onder de (lokale) stroming invariant is en dat $\dot{y} = 2y^2 - 2$ de beperking van het systeem (1) tot deze lijn is; geef bovendien de oplossingen van (1) met beginwaarden $(x_0, y_0) = (x_0, 1)$, $x_0 \neq 1$.

(*v*) Gebruik (*iv*) om te bewijzen dat het systeem (1) geen globale stroming heeft.

(*vi*) Laat zien dat de lokale stroming φ_t reversibel is ten opzichte van de spiegeling $\rho(x, y) = (x, -y)$, d.w.z. voor een oplossing $(x(t), y(t))$ van (1) is ook $(x(-t), -y(-t))$ een oplossing.

(*vii*) Schets het faseplaatje. *Hint:* gebruik je bevindingen in (*i*), (*iii*)$-$(*iv*) en (*vi*).

(bonus) Op welk gebied[1] $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ heeft het systeem (1) wél een globale stroming? Bewijs je bewering. Is dit gebied maximaal met deze eigenschap? Probeer ook dit te bewijzen.

3. Voor gegeven open deelverzamelingen $\Omega, \Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ zij het homeomorfisme $h : \Omega \longrightarrow \Lambda$ een topologische conjugatie tussen de stromingen $\varphi : \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \Omega$ en $\psi : \mathbb{R} \times \Lambda \longrightarrow \Lambda$ van de continu differentieerbare vectorvelden $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en $g : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^n$, respectievelijk (d.w.z. $\psi_t \circ h = h \circ \varphi_t$ voor alle $t \in \mathbb{R}$). Gegeven is verder een stroomlijn $y(t) = \varphi_t(y_0)$ met (bestaande!) limieten $\lim_{t \to -\infty} y(t) = y_1$ en $\lim_{t \to \infty} y(t) = y_2$.

(*i*) Bewijs dat $z(t) := h(y(t))$ het beginwaardeprobleem $\dot{z} = g(z)$, $z(0) = h(y_0)$ oplost.

(*ii*) Laat zien dat y_1 en y_2 evenwichtspunten van de stroming φ zijn.

(*iii*) Ga na dat $h(y_1)$ en $h(y_2)$ evenwichtspunten van de stroming ψ zijn.

[1] De deelverzameling $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ is een gebied $\iff$ Ω is open en samenhangend.