Hertentamen differentiaalvergelijkingen 27 mei 2014

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook de naam van je werkcollegeleider: Ori Yudilevich (groep 1), Joey van der Leer Duran (groep 2) of Thom Klaasse (groep 3).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Alle 14 deelopgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Beschouw op $\mathbb{R}^3$ het lineaire systeem $\dot{y} = Ay$ met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

   (i) Bereken de eigenwaarden van A.

   (ii) Geef de Jordan-normaalvorm van A en een basis ten opzichte waarvan A in deze Jordan-normaalvorm is.

   (iii) Bepaal de algemene oplossing $y(t)$ van $\dot{y} = Ay$.

   (iv) Voor welke beginvoorwaarden $y^0 \in \mathbb{R}^3$ geldt $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{e}^{tA} y^0 = 0$?

   (v) Ga na dat

$$\left\{ y^0 \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{tA} y^0 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} .$$

2. Beschouw op $\mathbb{R}^2$ het door $V(x,y) = 3x^2y - y^3 + 3(x^2+y^2)$ gegeven gradiënt-vectorveld

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} .$$

(*i*) Geef alle evenwichtspunten (x_0, y_0).

(*ii*) Bereken de linearizeringen in de evenwichtspunten en de eigenwaarden.

(*iii*) Bepaal de types van de evenwichtspunten en voor de zadels ook de bijbehorende eigenruimten.

(*iv*) Ga na dat de rechte lijn $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ onder de stroming invariant is.

(*v*) Gebaseerd op je bevindingen in (*i*), (*iii*) en (*iv*) begin een schets van het faseportret, maak een gok welke twee rechte lijnen door de oorsprong eveneens invariant zijn en maak daarmee het faseportet af.

3. Beschouw op $\mathbb{R}^2$ het systeem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{1+x^2} \\ \dot{y} &= y \end{aligned}$$

van differentiaalvergelijkingen.

(*i*) Ga na dat de bijbehorende stroming geen evenwichtspunten en geen periodieke banen heeft.

(*ii*) Bereken de bijbehorende stroming. *Hint:* hier kom je een cubieke vergelijking van de vorm $az^3 + bz^2 + cz + d(t) = 0$ tegen. Ga na dat deze vergelijking voor alle $t \in \mathbb{R}$ maar één (reële) oplossing heeft en schrijf deze oplossing als $z = z(a,b,c,d(t))$.

4. Schrijf Φ^{t,t_0} voor de niet-autonome stroming van de scalaire differentiaalvergelijking

$$\dot{y} = \cos(t) \cdot y .$$

(*i*) Bereken de monodromie-operator $T = \Phi^{2\pi,0}$.

(*ii*) Geef de substitutie $z = \Lambda(t) \cdot y$ die de gegeven differentiaalvergelijking omzet in een differentiaalvergelijking $\dot{z} = \Omega \cdot z$ met constante coëfficiënt.