

Hertentamen differentiaalvergelijkingen 19 augustus 2013

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook de naam van je werkcollegeleider: Boris Osorno Torres (groep 1), Joey van der Leer Duran (groep 2) of Siamak Taati (groep 3).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel in het vervolg gebruiken.
- *SUCCES!*

1. [10] Bewijs dat de maximale oplossing $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ van het beginwaardeprobleem

$$\dot{y} = \frac{y}{t} + t^3, \quad y(1) = \frac{1}{3}$$

1.0

voldoet aan $y(t) > 0$ voor alle $t \in I$.

2. [35] Beschouw op \mathbb{R}^2 het door $V(x, y) = x^3y + xy^3 - 4xy$ gegeven gradiënt-vectorveld

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

- (i) Geef alle evenwichtspunten (x_0, y_0) . 0.7
- (ii) Bereken de linearizeringen in de evenwichtspunten en de eigenwaarden. 0.7
- (iii) Bepaal de types van de evenwichtspunten, in het bijzonder hun stabiliteit. 0.7
- (iv) Ga na dat $(0, 0) + E_\lambda$ voor de twee eigenruimten E_λ onder de stroming invariant is. *Opmerking:* in feite zijn zelfs voor alle zadelpunten (x_0, y_0) en hun eigenruimten E_λ de verzamelingen $(x_0, y_0) + E_\lambda$ onder de stroming invariant, en daar mag je in het vervolg ook gebruik van maken. 0.7

(v) Schets het faseplaatje.

0.7

3. [35] Beschouw op \mathbb{R}^4 de Hamiltonfunctie

$$H(q, p) = p_1^2 + p_2^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_1 p_2 - q_2 p_1. \quad (1)$$

Doel van deze opgave is om de stroming van het door (1) gedefinieerde Hamiltoniaanse vectorveld te berekenen.

(i) Geef het door (1) gedefinieerde Hamiltoniaanse systeem.

0.7

(ii) Verifieer dat de lineaire deelruimten $\{q = p\}$ en $\{q = -p\}$ onder het Hamiltoniaanse systeem invariant zijn.

0.7

(iii) Bepaal de eigenwaarden van de lineaire deelsystemen op $\{q = p\}$ en $\{q = -p\}$.

0.7

(iv) Hoe zien de stromingen van de deelsystemen op $\{q = p\}$ en $\{q = -p\}$ eruit?

0.7

(v) Bereken de stroming van het door (1) gedefinieerde Hamiltoniaanse systeem.

Een antwoord in de vorm $\varphi_t = SR(t)S^{-1}$ met expliciet aangegeven $R(t)$ en S (of S^{-1} , naar keuze) volstaat, een inverse hoeft je dus niet te berekenen.

0.7

4. [20] Zij

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

een continu differentieerbaar vectorveld op \mathbb{R}^2 met stroming φ_t .

(i) Zij $A \subseteq \mathbb{R}^2$ een open gebied waarvan de rand een periodieke baan vormt. Laat zien dat A en de afsluiting \bar{A} invariant zijn onder φ_t , d.w.z. voor alle tijden $t \in \mathbb{R}$ geldt dat $\varphi_t(A) = A$ en $\varphi_t(\bar{A}) = \bar{A}$.

0.7

(ii) Toon aan dat

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} dx dy = 0$$

0.7

voor de integraal van de divergentie van het vectorveld over het gebied A uit (i).

(iii) Bewijs het criterium van Bendixon: een convex gebied waarin de divergentie van (2) geen nulpunten heeft kan geen periodieke banen bevatten.

0.6