Tentamen Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 13 april 2017, 13:30-16:30 uur

Dit tentamen bestaat uit vier reguliere opgaven en één bonusopgave. Maak iedere opgave op een apart vel. Het is bij dit tentamen niet toegestaan om een boek, aantekeningen of een grafische rekenmachine te gebruiken. Vergeet niet op elk ingeleverd vel uw naam, studentnummer en groepsnummer te zetten. Motiveer uw antwoorden. Succes!

Opgave 1 [15pt] Zij $y : I \to \mathbb{R}$ de maximale oplossing van het beginwaardeprobleem

$$y' + \frac{3}{x}y = x, \quad y(1) = 1.$$

Vind het interval I.

Opgave 2 [25pt] Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) [10 pts] Vind $\det(e^{xA})$.

(b) [15 pts] Het is bekend dat voor een $n \times n$ matrix A iedere matrixcoëfficiënt van e^{xA} een lineaire combinatie is van de functies $x^{m_k} e^{\lambda_j x}$ met geschikte $0 \le m_k < n$ en $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Wat is de maximale m_k voor matrix (1) ?

Opgave 3 [20pt] Vind de oplossing $y = y(x)$ van de 2de-orde differentiaalvergelijking

$$x^2 y'' - 6y = 0, \quad x > 0, \tag{2}$$

die voldoet aan $y(1) = 2$ en waarvoor $\lim_{x \downarrow 0} y(x)$ bestaat.

Opgave 4 [40pt] Beschouw het beroemde *Lorenz-stelsel* met $\sigma = -1,\ r = 1$, en $b = -2$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x - y, \\ \dot{y} & = & x - y - xz, \\ \dot{z} & = & 2z + xy. \end{array} \right. \tag{3}$$

(a) [5 pts] Laat zien dat de matrix van linearisatie van (3) in het rustpunt $x = y = z = 0$ een dubbele eigenwaarde $\lambda = 0$ heeft.

(b) [5 pts] Laat zien dat de substitutie

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & u + v \\ y & = & u \\ z & = & w \end{array} \right.$$

het stelsel (3) transformeert in het stelsel **Z.O.Z.**

$$\begin{cases} \dot{u} &= v - w(u+v), \\ \dot{v} &= w(u+v), \\ \dot{w} &= 2w + u(u+v). \end{cases} \tag{4}$$

(c) [10 pts] Zij $t \mapsto (u(t), v(t), w(t))$ de maximale oplossing van (4) met $u(0) = u_0, v(0) = v_0, w(0) = w_0$. Een deelverzameling $M \subset \mathbb{R}^3$ heet *invariant* voor (4) als $(u_0, v_0, w_0) \in M$ impliceert dat $(u(t), v(t), w(t)) \in M$ voor alle $t \in \mathbb{R}$ waarvoor de maximale oplossing is gedefinieerd.

Bewijs dat de *paraboloïde*

$$P := \left\{ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : w = -\frac{1}{2}(u+v)^2 \right\}$$

invariant is voor (4).

(d) [5 pts] Laat zien dat voor iedere oplossing $(u(t), v(t), w(t)) \in P$ geldt

$$\begin{cases} \dot{u} &= v + \frac{1}{2}(u+v)^3, \\ \dot{v} &= -\frac{1}{2}(u+v)^3. \end{cases} \tag{5}$$

(e) [10 pts] Bewijs dat (5) een *Hamilton-stelsel* is en bereken de bijbehorende Hamilton-functie. Schets het faseplaatje van (5) in een omgeving van het rustpunt $u = v = 0$.

(f) [5 pts] Welke conclusies kunnen getrokken worden over het gedrag van de oplossingen van (4) op de paraboloïde P? Wat impliceert dat voor het Lorenz-stelsel (3)?

Bonus Opgave [10pt] Vind de oplossing van het Cauchy-beginwaardeprobleem

$$u'' + u' = (u')^2, \quad u(0) = 0, \; u'(0) = 1.$$