Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB231 werd in 2001/2002 gegeven door Y. Kuznetsov.

Differentiaalvergelijkingen A (WISB231)
25 februari 2002

Opgave 1

(30 punten)

Beschouw het beginwaardeprobleem

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y + \cos(x) + 1, \quad y(0) = y_0.$$

a) Los dit beginwaardeprobleem voor $y_0 \in \mathbb{R}$ op. Geef ook een zo groot mogelijk interval waarop de oplossing bestaat.

b) Voor welke waarde $y_0 \in \mathbb{R}$ is de oplossing $y(x)$ periodiek en wat is de bijbehorende periode T?

c) Schets $y(x)$ voor een $y_0 \neq \frac{3}{2}$. Hoe verhoudt de oplossing $y(x)$ zich voor grote x-waarden?

Opgave 2

(30 punten)

Bereken e^{xA} voor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opgave 3

(40 punten)

Beschouw het volgende stelsel van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= 2xy \end{cases}$$

a) Bereken de rustpunten.

b) Een verzameling $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ heet invariant wanneer het volgende geldt: een oplossing die start in Ω, blijft in Ω zolang hij gedefinieerd is. Laat zien dat de x-as een invariante verzameling is voor het gegeven stelsel.

c) Maak de transformatie naar poolcoördinaten $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$. Laat zien dat het stelsel onder deze transformatie overgaat in het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \rho^2 \cos \phi \\ \dot{\phi} &= \rho \sin \phi \end{cases}$$

d) De differentiaalvergelijking voor $\rho = \rho(\phi)$ heeft gescheiden variabelen. Schrijf en los deze vergelijking op. Laat zien dat de oplossingen van het oorspronkelijke stelsel met $y(0) \neq 0$ voldoen aan de vergelijking $2Cy = x^2 + y^2$ met een constante C.

e) Teken met behulp van deze informatie het faseplaatje behorend bij het oorspronkelijke stelsel. Zet ook pijltjes! Beschrijf de banen meetkundig.