Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{T}\!\mathcal{B}\mathcal{C}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB231 werd in 2001/2002 gegeven door Yuri Kuznetsov.

Differentiaalvergelijkingen B (WISB231)
21 augustus 2002

Opgave 1
(25 punten)

Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 4y = f_j(x)$$

voor de inhomogene termen

a) $f_1(x) = 0$

b) $f_2(x) = \sin x$

c) $f_3(x) = e^x$

Opgave 2
(35 punten)

Beschouw de vergelijking van Bessel:

$$L_\nu y(x) := x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0 \ .$$

Hierin is $\nu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ een parameter.

a) Laat zien dat als $x^r \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ oplossing is van de vergelijking met $a_0 \neq 0$, dan geldt dat

$$r = \pm\nu \ , \ a_1 = 0 \text{ en } a_n[(r+n)^2 - \nu^2] + a_{n-2} = 0 \text{ voor } n \geq 2 \ .$$

b) Laat zien dat de machtreeks $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ absoluut convergeert voor alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Voor welke waarden van $\nu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bestaan er twee lineair onafhankelijke oplossingen van de vorm $x^r \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ met $a_0 \neq 0$?

d) Laat twee lineair onafhankelijke oplossingen $y_1(x)$ en $y_2(x)$ van de Besselvergelijking gegeven zijn, dus $L_\nu y_1(x) = L_\nu y_2(x) = 0$. Laat zien dat er een constante $c \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ is zodat we voor de Wronskiaan $W(x)$ hebben

$$W(x) := y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = \frac{c}{x}$$

Hint: laat zien dat $y_1(x)L_\nu y_2(x) - y_2(x)L_\nu y_1(x) = x\frac{d}{dx}(xW(x))$.

e) Beargumenteer dat $y_1(x)$ en/of $y_2(x)$ singulier zijn/is in $x = 0$.

Opgave 3
(20 punten)

Beschouw voor $q \neq 0$ Newton's vergelijking

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -V'(q)$$

waarin $V(q) = \frac{1}{q} - \frac{1}{q^2}$. Schets het faseplaatje in het $(q, \frac{dq}{dt})$-vlak (met uitzondering van de as $q = 0$). Zet ook pijltjes.

Opgave 4

(20 punten)

Beschouw het randwaardeprobleem

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \pi^2 y = \cos x \ , \ \ y'(0) = \pi, \ \ y(\frac{1}{2}) = \alpha \ .$$

a) Ga na voor welke waarde(n) van α dit probleem een oplossing heeft en of deze oplossing uniek is?

b) Bepaal voor de in onderdeel a gevonden waarde(n) van α alle mogelijke oplossingen.