MATHEMATISCH INSTITUUT, FACULTEIT WISKUNDE EN INFORMATICA, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE WISB231 WERD IN 2000/2001 GEGEVEN DOOR YURI KUZNETSOV.

Differentiaalvergelijkingen A (WISB231)
4 mei 2001

Opgave 1 *(30 punten)*

Beschouw het beginwaardeprobleem:

$$\frac{dy}{dx} = Ay + b(x) \quad , \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad b(x) = \begin{pmatrix} x \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

a) Bereken e^{xA}.

b) Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem.

Opgave 2 *(30 punten)*

a) Teken het faseplaatje van de vergelijking:

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y$$

b) Teken het faseplaatje van de vergelijking:

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} y$$

c) Beschouw het beginwaardeprobleem:

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y \quad , \quad y(0) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Bepaal de beginwaarden waarvoor $\lim_{x\to\infty} e^x ||y(x)|| < \infty$.

Opgave 3 *(40 punten)*

Beschouw het volgende stelsel van nietlineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases} \tag{1}$$

a) Bereken de stationaire punten van (1).

Een verzameling $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ heet invariant wanneer het volgende geldt: een oplossing die start in Ω, blijft in Ω zolang hij gedefinieerd is.

b) Laat zien dat de x-as een invariante verzameling is voor het stelsel (1).

We gaan op zoek naar een constante van beweging voor het stelsel (1). Een constante van beweging is een functie $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die constant is op de banen van het stelsel differentiaalvergelijkingen. Dat wil zeggen dat $\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) = \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y}\dot{y} = 0$.

c) Laat zien dat $E := \frac{x^2+y^2}{2y}$ een constante van beweging is voor het stelsel (1), gedefinieerd op $\mathbb{R}^2 \backslash \{x\text{-as}\}$.

d) Teken met behulp van deze informatie het faseplaatje behorend bij (1). Zet ook pijltjes! Beschrijf de banen meetkundig.

Met behulp van een constante van beweging kun je dus een faseplaatje tekenen. Maar de grote vraag is natuurlijk hoe je zo'n constante van beweging kunt vinden. De vergelijking $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2-y^2}{2xy}$ heeft geen gescheiden variabelen en is daarom moeilijk te integreren. Hieronder proberen we een andere methode.

e) Maak de transformatie naar poolcoordinaten

$$x = \rho\cos\phi$$
$$y = \rho\sin\phi$$

Laat zien dat het stelsel (1) onder deze transformatie overgaat in het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho^2\cos\phi \\ \dot{\phi} = \rho\sin\phi \end{cases}$$

f) De vergelijking voor $\frac{d\rho}{d\phi}$ heeft gescheiden variabelen. Schrijf deze vergelijking op en leid er een constante van beweging uit af in termen van ϕ en ρ. Herschrijf deze in termen van x en y. Vergelijk het resultaat met de eerder gegeven E.