Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A–Eskwadraat.
Het college WISB231 werd in 2001/2002 gegeven door Yuri Kuznetsov.

# Differentiaalvergelijkingen A (WISB231)
# 11 juli 2002

## Opgave 1

Beschouw het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(x)y + \sin(x), \quad y(0) = y_0 \ . \tag{1}$$

a) Los het beginwaardeprobleem (1) op voor $y_0 \in \mathbb{R}$. Geef ook een zo groot mogelijk interval waarop de oplossing bestaat.

b) Voor welke waarde(n) $y_0 \in \mathbb{R}$ is de oplossing $y(x)$ periodiek en wat is de bijbehorende periode $T$?

c) Bereken de stroming na tijd $nT$, d.w.z. de afbeelding $\Phi^{nT,0}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

d) Schets $y(x)$ voor een $y_0 \neq 1$.

## Opgave 2

Beschouw het volgende stelsel van differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{y}{2} - x\sqrt{x^2+y^2} + \frac{xy}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dot{y} = \frac{x}{2} + y - y\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \tag{2}$$

a) Laat zien dat $(0,0)$ en $(1,0)$ de enige stationaire punten van (2) zijn.

Een verzameling $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ heet invariant wanneer het volgende geldt: een oplossing die start in $\Omega$, blijft in $\Omega$ zolang hij gedefinieerd is.

b) Laat nu zien dat de cirkel $\{x^2+y^2=1\}$ een invariante verzameling is voor het stelsel (2). Hint: Laat zien dat voor $(x,y)$ op de cirkel $\{x^2+y^2=1\}$ geldt $x\dot{x}+y\dot{y}=0$.

c) Maak de transformatie naar poolcoordinaten

$$x = \rho\cos\phi$$
$$y = \rho\sin\phi$$

Laat zien dat het stelsel (2) onder deze transformatie overgaat in het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1-\rho), \\ \dot{\phi} = \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right). \end{cases}$$

Hint: $\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-\cos(\phi))$

d) Teken nu het faseplaatje in het $(x,y)$-vlak. Zet ook pijltjes. Beschrijf in woorden de kwalitatieve verschillen tussen de verschillende oplossingen.

## Opgave 3

Beschouw het stelsel

$$\frac{dy}{dx} = Ay \ .$$

a) Bereken de stromingsmatrix $e^{xA}$ en maak een schets van het faseplaatje als

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Zet ook pijltjes.

b) Bereken de stromingsmatrix $e^{xA}$ en maak een schets van het faseplaatje als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Zet ook pijltjes.

c) Bereken de stromingsmatrix $e^{xA}$ als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

d) Beschouw nu het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy}{dx} = Ay \quad , \quad y(0) = y_0$$

voor de matrix $A$ als in onderdeel **3 c.** Voor welke $y_0 \in \mathbb{R}$ geldt dat we voor de oplossing hebben dat $\lim_{x\to\infty} \|e^{-x}y(x)\| < \infty$?