Differentiaalvergelijkingen A (WISB231)
18 april 2005

Opgave 1 *(20 punten)*

Los het volgende beginwaardenprobleem op:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}, \quad y(1) = 1.$$

Hint: Pas eerst een geschikte substitutie toe.

Opgave 2 *(25 punten)*

Bereken e^{xA} voor $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Opgave 3 *(30 punten)*

Beschouw het volgende stelsel van differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dot{x} & = & -x, \\ \dot{y} & = & y + x^2. \end{cases} \tag{1}$$

a) Vind een oplossing $(x(t), y(t))$ van (1) die voldoet aan $x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$.

b) Laat zien dat het stelsel (1) onder de transformatie

$$x = \xi, \quad y = \eta - \frac{1}{3}\xi^2 \tag{2}$$

overgaat in het lineaire stelsel

$$\begin{cases} \dot{\xi} & = & -\xi, \\ \dot{\eta} & = & \eta. \end{cases} \tag{3}$$

c) Teken het faseplaatje van (3) in het (ξ, η)-vlak en schets dan het faseplaatje van (1) in het (x, y)-vlak. Beschrijf in woorden de overeenkomsten en verschillen tussen de twee faseplaatjes.

d) Neem een punt (x_0, y_0). Vind een punt (ξ_0, η_0) dat in het punt (x_0, y_0) overgaat onder transformatie (2). Los het beginwaardenprobleem (3) met $\xi(0) = \xi_0, \eta(0) = \eta_0$ op. Pas transformatie (2) toe op de gevonden oplossing en vergelijk het resultaat met het antwoord van vraag a.

Opgave 4 *(25 punten)*

Beschouw voor $x \geq 0$ het volgende beginwaardenprobleem.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}, \quad y(0) = 1. \tag{4}$$

a) Geef een oplossing die bestaat voor alle $x \geq 0$.

b) Vind m.b.v. scheiding van variabelen een niet constante oplossing. Geef ook het maximale interval aan waarop die oplossing bestaat. Hint:

$$\frac{d}{dy}\sqrt{1-y^2} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

c) De gevonden oplossingen zijn niet identiek. Leg uit waarom dit de Existentie en Eenduidigheidsstelling niet tegenspreekt.

d) Construeer een oplossing die voor $x_1 > 1$ ophoudt te bestaan. Ga de geldigheid van deze oplossing na.

e) Schets de verzameling van oplossingen van (4).