MATHEMATISCH INSTITUUT, FACULTEIT WISKUNDE EN INFORMATICA, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE WISB231 WERD IN 2002/2003 GEGEVEN DOOR YURI KUZNETSOV.

Differentiaalvergelijkingen B (WISB231)
1 mei 2003

Opgave 1
(20 punten)

Los het volgende randwaardeprobleem op:

$$y'' + 2y' - 3y = e^x, \quad y(0) = 15, \; y(\ln 2) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Opgave 2
(30 punten)

Beschouw Newtons vergelijking $\ddot{q} = -U'(q)$ waarin $U(q) = qe^{-q^2}$. Schets het faseplaatje in het $(q, \dot{q})$-vlak. Zet ook pijltjes.

Opgave 3
(50 punten)

Toestanden met energie $E < 0$ van een elektron in het waterstof atoom worden beschreven door golffuncties $\psi = \psi(r)$. Deze voldoen voor $r > 0$ aan de Schrödinger-vergelijking:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\psi) - \frac{e^2}{r}\psi = E\psi, \tag{1}$$

waarin $\hbar$, m en e positieve constanten zijn. Bovendien moeten de golffuncties begrensd en exponentieel dalend voor $r \to \infty$ zijn.

a) Laat zien dat met
$$r = \frac{\hbar^2}{me^2}\,x, \;\; E = \frac{me^4}{2\hbar^2}\,\varepsilon$$
de vergelijking (1) kan worden herschrijven als
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\varepsilon + \frac{2}{x}\right)y, \tag{2}$$
waarin $y = x\psi$.

b) Toon aan dat de substitutie $y(x) = e^{-\alpha x}u(x)$ in (2) met $\alpha > 0$ geeft
$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2\alpha\frac{du}{dx} + \left(\frac{2}{x} + \alpha^2 + \varepsilon\right)u = 0. \tag{3}$$

c) Neem $\alpha^2 = -\varepsilon$ zo dat u voldoet aan de vergelijking
$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2\alpha\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = 0. \tag{4}$$
Laat zien dat als $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een oplossing is van (4), dan geldt $a_0 = 0$ en a_{n+1} kan vanuit a_n eenduidig bepaald worden voor $n \geq 1$. Vind de bijbehorende recurrente betrekking. Wat is de convergentiestraal van deze machtreeks?

d) Bewijs dat als
$$\alpha = \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$
dan is de functie $u(x)$ een polynoom $p_k(x)$ van graad k. Bereken p_k met $p_k'(0) = 1$ voor $k = 1, 2$ en 3. Toon aan dat de bijbehorende $\psi_k(r)$ begrensd en exponentieel dalend voor $r \to \infty$ zijn. Schets de grafieken van $\psi_k(r)$ voor $k = 1, 2$ en 3.

e) Bereken de energie E_k van het elektron die de golffunctie ψ_k heeft. Wat is de minimale energie van het elektron in het waterstof atoom?

Opgave 4 (Bonus)

(10 punten)

Beide functies $y_1(x) = x$ en $y_2(x) = \sin x$ zijn de oplossingen van een n-de order differentiaalvergelijking

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \ldots, \frac{dy}{dx}, y\right),$$

waarin F een continu-differentieerbare functie is. Hoe groot moet n zijn en waarom?