Departement Wiskunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB231 werd in 2004/2005 gegeven door Yuri Kuznetsov.

Differentiaalvergelijkingen B (WISB231)
6 juli 2005

Opgave 1

(30 punten)

Beschouw de vergelijking

$$\ddot{q} = -\frac{dU(q)}{dq}, \quad U(q) = -\tfrac{1}{2}(q^2-1)^2. \tag{1}$$

a) Schets het faseplaatje van (1), d.w.z. teken de banen in het $(q, \dot{q})$-vlak. Zet ook pijltjes.

b) Is de oplossing $q(t)$ van (1) met

$$q(0) = \frac{1}{2}, \quad \dot{q}(0) = \frac{2}{3}$$

periodiek?

Opgave 2

(30 punten)

Los het volgende randwaardeprobleem op:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = -x, \quad y(0) = y'(0) = y(\pi) = y'(\pi) = 0.$$

Opgave 3

(40 punten)

Beschouw de vergelijking

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0, \qquad -1 < x < 1. \tag{2}$$

Hierin $\lambda \in \mathbb{R}$ een parameter.

a) Laat zien dat als $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ oplossing is van (2), dan geldt voor $n \geq 0$ dat

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1)-\lambda}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

b) Laat zien dat als $\lambda = m(m+1)$ met $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, vergelijking (2) dan een polynoom van graad m als oplossing heeft.

Het hierboven gevonden polynoom, genormeerd door de eigenschap dat $P_m(1) = 1$ heet het *Legendre polynoom* van graad m.

c) Bewijs dat de functie

$$g(x,t) := \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}, \quad |x| \leq 1 \text{ en } |t| < 1,$$

voldoet aan

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\partial g}{\partial x}\right] + t\frac{\partial^2}{\partial t^2}(tg) = 0.$$

d) Schrijf

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)t^n \tag{3}$$

en laat zien dat

1. $Q_n(x)$ een polynoom van x is.
   Hint: Gebruik de Taylorontwikkeling rond $t = 0$.
2. $Q_n(x)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking (2) met $\lambda = n(n+1)$.
3. $Q_n(1) = 1$ voor alle $n = 0, 1, 2, \ldots$.
   Hint:
   $$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \text{ voor } |t| < 1.$$
   Concludeer dat $Q_n(x) = P_n(x)$ voor $-1 < x < 1$ en $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

e) Bewijs dat $P_1(x) = xP_0(x)$ en

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}[(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)], \qquad \text{voor} \quad n \geq 1.$$

Hint: Bereken de afgeleide naar t van beide zijden van vergelijking (3). Vergelijk dan de coëfficiënten voor t^n.

f) Geef expliciete formules voor $P_2(x), P_3(x)$, en $P_4(x)$.

Bonusopgave *(20 punten)*

De volgende functies

$$y_1(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{en} \quad y_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

voldoen aan dezelfde n-de orde differentiaalvergelijking

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \ldots, \frac{dy}{dx}, y\right),$$

waarin F een continu-differentieerbare functie is. Hoe groot moet n minimaal zijn en waarom?