

## Differentiaalvergelijkingen A (WISB231) 25 februari 2003

### Opgave 1

(30 punten)

Beschouw het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy}{dx} = -y + \cos(x) + 1, \quad y(0) = y_0. \quad (1)$$

- Los het beginwaardeprobleem (1) voor  $y_0 \in \mathbb{R}$  op. Geef ook een zo groot mogelijk interval waarop de oplossing bestaat.
- Voor welke waarde  $y_0 \in \mathbb{R}$  is de oplossing  $y(x)$  periodiek en wat is de bijbehorende periode  $T$ ?
- Schets  $y(x)$  voor een  $y_0 \neq \frac{3}{2}$ . Hoe verhoudt zich de oplossing  $y(x)$  voor grote  $x$  waarden?

### Opgave 2

(30 punten)

Bereken  $e^{xA}$  voor  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

### Opgave 3

(40 punten)

Beschouw het volgende stelsel van nietlineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases} \quad (2)$$

- Bereken de rustpunten van (2).
- Een verzameling  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  heet invariant wanneer het volgende geldt: een oplossing die start in  $\Omega$ , blijft in  $\Omega$  zolang hij gedefinieerd is. Laat zien dat de  $x$ -as een invariante verzameling is voor het stelsel (2).
- Maak de transformatie naar poolcoördinaten  $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ . Laat zien dat het stelsel (2) onder deze transformatie overgaat in het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho^2 \cos \varphi \\ \dot{\varphi} = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

- De differentiaalvergelijking voor  $\rho = \rho(\varphi)$  heeft gescheiden variabelen. Schrijf en los deze vergelijking op. Laat zien dat de oplossingen van (2) met  $y(0) \neq 0$  voldoen aan de vergelijking  $2Cy = x^2 + y^2$  met een constante  $C$ .
- Teken met behulp van deze informatie het faseplaatje behorend bij (2). Zet ook pijltjes! Beschrijf de banen meetkundig.