

Differentiaalvergelijkingen A (WISB231) 9 juli 2001

Opgave 1

Beschouw het beginwaardeprobleem:

$$\frac{dy}{dx} = Ay + b(x) \quad , \quad y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

met

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad b(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Bereken e^{xA} .
- Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem.

Opgave 2

- Teken het faseplaatje van de vergelijking:

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y$$

- Teken het faseplaatje van de vergelijking:

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} y$$

- Teken het faseplaatje van de vergelijking:

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} y$$

Opgave 3

Beschouw het volgende stelsel van nietlineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = 2x - 3x^2 \end{cases} \quad (1)$$

- a) Bereken de stationaire punten van (1).

We gaan op zoek naar een constante van beweging voor het stelsel (1). Een constante van beweging is een functie $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die constant is op de banen van het stelsel differentiaalvergelijkingen. Dat wil zeggen dat $\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) = 0$.

- b) Bepaal een constante van beweging E voor (1). Hint: probeer een E van de vorm $E = y^2 + f(x)$.

- c) Teken het faseplaatje behorend bij (1). Zet ook pijltjes!

Een waarde van E bepaalt één of meerdere oplossingen.

- d) Voor welke waarden van E zijn hier periodieke oplossingen bij?