

Differentiaalvergelijkingen (WISB231) 24 augustus 2004

N.B. Dit is een hertentamen over alle stof van Differentiaalvergelijkingen A én B.

Opgave 1

(20 punten)

Beschouw het stelsel $y' = Ay$, $y \in \mathbf{R}^2$. Bereken de stromingsmatrix e^{xA} en maak een schets van het faseplaatje als

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Zet ook pijltjes.

Opgave 2

(30 punten)

Beschouw het volgende stelsel van differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu x - y + x(x^2 + y^2) - x(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) \\ \dot{y} &= x + \mu y + y(x^2 + y^2) - y(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) \end{cases} \quad (1)$$

waarin μ een reële parameter is.

- Laat zien dat $(0, 0)$ het enige rustpunt van (1) is.
- Maak de transformatie naar poolcoördinaten

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \end{aligned}$$

Laat zien dat het stelsel (1) onder deze transformatie overgaat in het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\mu + \rho^2 - \rho^4), \\ \dot{\phi} = 1. \end{cases}$$

- Hoeveel gesloten banen kan (1) hebben? Wat is de periode van de bijbehorende periodieke oplossingen? Voor welke μ heeft het stelsel twee, één of geen gesloten banen?
- Teken nu de faseplaatjes van (1) in het (x, y) -vlak voor $\mu = -1, -\frac{1}{8}$, en 1. Zet ook pijltjes. Beschrijf in woorden de kwalitatieve verschillen tussen deze gevallen.

Opgave 3

(25 punten)

Beschouw de vergelijking

$$\ddot{q} = -\frac{dU(q)}{dq}, \quad U(q) = q(q+2)e^{q/2}. \quad (2)$$

Schets het faseplaatje van (2), d.w.z. teken de banen in het (q, \dot{q}) -vlak. Zet ook pijltjes.

Opgave 4

(25 punten)

Los het volgende randwaardeprobleem op:

$$y'' - 2y' + y = e^x, \quad y(0) = -\frac{1}{2}, \quad y(1) = 0.$$