

## Differentiaalvergelijkingen A (WISB231) 8 mei 2003

### Opgave 1 (30 punten)

Bepaal met behulp van Picard-iteraties een benadering van de oplossing van het volgende beginwaardeprobleem:

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1.$$

Vind de oplossing met een andere methode. Vergelijk de antwoorden.

### Opgave 2 (30 punten)

Bereken  $e^{xA}$  voor  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Opgave 3 (40 punten)

Beschouw het volgende stelsel van differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu x - y + x(x^2 + y^2) - x(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) \\ \dot{y} &= x + \mu y + y(x^2 + y^2) - y(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) \end{cases} \quad (1)$$

waarin  $\mu$  een reële parameter is.

- a) Laat zien dat  $(0, 0)$  het enige rustpunt van (1) is.
- b) Maak de transformatie naar poolcoördinaten

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \end{aligned}$$

Laat zien dat het stelsel (1) onder deze transformatie overgaat in het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\mu + \rho^2 - \rho^4), \\ \dot{\phi} = 1. \end{cases}$$

- c) Hoeveel gesloten banen kan (1) hebben? Wat is de periode van de bijbehorende periodieke oplossingen? Voor welke  $\mu$  heeft het stelsel twee, één of geen gesloten banen?
- d) Teken nu de faseplaatjes van (1) in het  $(x, y)$ -vlak voor  $\mu = -1, -\frac{1}{8}$ , en 1. Zet ook pijltjes. Beschrijf in woorden de kwalitatieve verschillen tussen deze gevallen.