

Differentiaalvergelijkingen B (WISB231) 2 juli 2004

Opgave 1

(10 punten)

Geef de algemene oplossing van de lineaire vierde orde differentiaalvergelijking

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Opgave 2

(20 punten)

Beschouw de vergelijking

$$\ddot{q} = -\frac{dU(q)}{dq}, \quad U(q) = q(q+2)e^{q/2}. \quad (1)$$

Schets het faseplaatje van (1), d.w.z. teken de banen in het (q, \dot{q}) -vlak. Zet ook pijltjes.

Opgave 3

(20 punten)

Los het volgende randwaardeprobleem op:

$$y'' - 2y' + y = e^x, \quad y(0) = -\frac{1}{2}, \quad y(1) = 0.$$

Opgave 4

(50 punten)

Toestanden met energie $E < 0$ van een elektron in het waterstof atoom worden beschreven door golffuncties $\psi = \psi(r)$. Deze voldoen voor $r > 0$ aan de Schrödinger-vergelijking:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(r\psi) - \frac{e^2}{r} \psi = E\psi, \quad (2)$$

waarin \hbar , m en e positieve constanten zijn. Bovendien moeten de golffuncties begrensd en exponentieel dalend voor $r \rightarrow \infty$ zijn.

a) Laat zien dat met

$$r = \frac{\hbar^2}{me^2} x, \quad E = \frac{me^4}{2\hbar^2} \varepsilon$$

de vergelijking (2) kan worden herschrijven als

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\left(\varepsilon + \frac{2}{x}\right) y, \quad (3)$$

waarin $y = x\psi$.

b) Toon aan dat de substitutie $y(x) = e^{-\alpha x} u(x)$ in (3) met $\alpha > 0$ geeft

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - 2\alpha \frac{du}{dx} + \left(\frac{2}{x} + \alpha^2 + \varepsilon\right) u = 0. \quad (4)$$

c) Neem $\alpha^2 = -\varepsilon$ zo dat u voldoet aan de vergelijking

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - 2\alpha \frac{du}{dx} + \frac{2}{x} u = 0. \quad (5)$$

Laat zien dat als $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een oplossing is van (5), dan geldt $a_0 = 0$ en a_{n+1} kan vanuit a_n eenduidig bepaald worden voor $n \geq 1$. Vind de bijbehorende recurrente betrekking. Wat is de convergentiestraal van deze machtreeks?

d) Bewijs dat als

$$\alpha = \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

dan is de functie $u(x)$ een polynoom $p_k(x)$ van graad k . Bereken p_k met $p'_k(0) = 1$ voor $k = 1, 2$ en 3 . Toon aan dat de bijbehorende $\psi_k(r)$ begrensd en exponentieel dalend voor $r \rightarrow \infty$ zijn. Schets de grafieken van $\psi_k(r)$ voor $k = 1, 2$ en 3 .

e) Bereken de energie E_k van het elektron die de golffunctie ψ_k heeft. Wat is de minimale energie van het elektron in het waterstof atoom?