Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB231 werd in 2002/2003 gegeven door Yuri Kuznetsov.

Differentiaalvergelijkingen B (WISB231)
10 juli 2003

Opgave 1 *(20 punten)*

Beschouw Newtons vergelijking $\ddot{q} = -U'(q)$ waarin

$$U(q) = \frac{1}{4}q^4 - \frac{1}{3}q^3 - q^2.$$

Schets het faseplaatje in het $(q, \dot{q})$-vlak. Zet ook pijltjes.

Opgave 2 *(30 punten)*

Los het volgende randwaardeprobleem op:

$$y''' - y' = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y(\ln 2) = 2.$$

Opgave 3 *(50 punten)*

Beschouw de vergelijking van Chebychev:

$$L_\lambda y(x) := (1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0. \tag{1}$$

Hierin is $\lambda \in \mathbb{R}$ een parameter.

a) Laat zien dat als $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ oplossing is van de vergelijking, dan geldt voor $n \geq 0$ dat

$$a_{n+2} = \frac{n^2 - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

Wat is de convergentiestraal van deze machtreeks?

b) Laat zien dat als $\lambda = k^2,\ k \in \mathbb{N}$, de vergelijking een polynoom $P_k(x)$ van graad k als oplossing heeft.

Het hierboven gevonden polynoom, genormeerd door de eigenschap dat $P_k(1) = 1$, heet het *Chebychev polynoom* van graad k.

c) Neem $T_k(x) = \cos(k \arccos(x))$ voor $k \in \mathbb{N}$ en $x \in [-1, 1]$. Toon aan dat T_k een oplossing van (1) is op $[-1, 1]$ met $\lambda = k^2$. Hint: Gebruik dat $\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

d) Bewijs dat voor elke $k \in \mathbb{N}$ en $x \in [-1, 1]$ geldt

$$T_{k+2}(x) = 2xT_{k+1}(x) - T_k(x), \tag{2}$$

waarin $T_0(x) = 1$ en $T_1(x) = x$. Hint: Gebruik dat

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$$

e) Bespreek de relatie tussen T_k en P_k.