

## Differentiaalvergelijkingen (DIFFa) 31 augustus 2006

### Opgave 1

(20 punten)

Bereken de matrix  $A$  waarvoor

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) & 0 & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ 0 & e^t & 0 \\ \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & 0 & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \end{pmatrix}.$$

### Opgave 2

(30 punten)

Beschouw de vergelijking

$$\ddot{q} = q(q^2 - 1). \quad (1)$$

- Schets het faseplaatje van (1), d.w.z. teken de banen in het  $(q, v)$ -vlak met  $v = \dot{q}$ . Zet ook pijltjes.
- Zij  $q(t)$  een oplossing van (1) met  $q(0) = 0, \dot{q}(0) = v_0$ . Voor welke waarden van  $v_0$  is  $q(t)$  periodiek?

### Opgave 3

(30 punten)

Zij  $y(x)$  een oplossing van het Cauchy-beginwaardeprobleem

$$y'' + \frac{y}{1+x} = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Vind  $a_n$  met  $n = 0, 1, 2, 3$  en  $4$  in de reeksontwikkeling

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

### Opgave 4

(20 punten)

Onderzoek of het volgende inhomogene randwaardeprobleem

$$y'' + \pi^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = -1,$$

een oplossing heeft.