Mathematisch Instituut, Faculteit Wiskunde en Informatica, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISB231 werd in 2001/2002 gegeven door Yuri Kuznetsov.

Differentiaalvergelijkingen B (WISB231)
2 juli 2002

Opgave 1
(25 punten)

Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = f_j(x)$$

voor de inhomogene termen

a) $f_1(x) = 0$

b) $f_2(x) = 1$

c) $f_3(x) = e^x$

Opgave 2
(35 punten)

Beschouw de vergelijking van Chebychev:

$$L_\lambda y(x) := (1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dt} + \lambda y = 0 \ .$$

Hierin is $\lambda \in \mathbb{R}$ een parameter.

a) Laat zien dat als $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ oplossing is van de vergelijking, dan geldt voor $n \geq 0$ dat

$$a_{n+2} = \frac{n^2 - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n$$

b) Wat is de convergentiestraal van deze machtreeks? (De convergentiestraal ρ van de machtreeks is het supremum van alle r waarvoor $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ convergeert.)

c) Laat zien dat als $\lambda = k^2,\ k \in \mathbb{N}$, de vergelijking een polynoom $P_k(x)$ van de graad k als oplossing heeft?

Het hierboven gevonden polynoom, genormeerd door de eigenschap dat $P_k(1) = 1$, heet het Chebychev polynoom van graad k

d) Laat zien dat $P_k(x) = \cos(k \arccos(x))$. Hint: toon aan dat $x \mapsto \cos(k\arccos(x))$ oplossing is van de differentiaalvergelijking met dezelfde beginvoorwaarden als $P_k(x)$. Gebruik dat $\frac{d}{dt}\arccos(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

e) Laat zien dat voor oplossingen $y_\lambda(x)$ en $y_\mu(x)$ van respectievelijk de vergelijkingen $L_\lambda y_\lambda(x) = 0$ en $L_\mu y_\mu(x) = 0$ de volgende orthogonaliteitseigenschap geldt:

$$(\lambda - \mu)\int_{-1}^{1} \frac{y_\lambda(x) y_\mu(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$$

Hint: gebruik de differentiaalvergelijkingen en pas partiële integratie toe.

Opgave 3 *(20 punten)*

Beschouw Newton's vergelijking

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -V'(q)$$

waarin $V(q) = \frac{1}{4}q^4 + \frac{1}{3}q^3 - q^2$. Schets het faseplaatje in het $(q, \frac{dq}{dt})$-vlak. Zet ook pijltjes.

Opgave 4 *(20 punten)*

Beschouw het randwaardeprobleem

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = e^x \ , \ y(0) = 2, \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha \ .$$

a) Ga na voor welke α heeft dit probleem een oplossing heeft en of deze oplossing uniek is?

b) Bepaal voor de in onderdeel a gevonden waarden van α alle mogelijke oplossingen.