Deeltentamen A Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 19 april 2007, 9:00-12:00 uur

Dit deeltentamen bestaat uit vier opgaven. Het is bij dit tentamen niet toegestaan om een boek, aantekeningen of een grafische rekenmachine te gebruiken. Vergeet niet op elk ingeleverd vel uw naam, studentnummer en practicumleider (Taoufik Bakri of Slavik Koval) te zetten. Motiveer uw antwoorden. Succes!

Opgave 1 [20pt] Bewijs dat de maximale oplossing $y : I \to \mathbb{R}$ van het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy}{dx} = y - x^2 + 2x, \quad y(0) = 1,$$

voldoet aan $y(x) > x^2$ voor alle $x \in I$.

Opgave 2 [30pt] Beschouw het volgende stelsel van nietlineaire differentiaalvergelijkingen in het vlak:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y - xy, \\ \dot{y} &= x + x^2. \end{cases} \tag{1}$$

1. Bereken alle rustpunten van (1).
2. Maak de transformatie naar poolcoordinaten $x = \rho \cos\varphi, y = \rho \sin\varphi$. Laat zien dat het stelsel (1) onder deze transformatie overgaat in het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= 0, \\ \dot{\varphi} &= 1 + \rho\cos\varphi. \end{cases}$$

3. Uit de differentiaalvergelijking voor ρ volgt dat $\rho(t) = C$ met een $C \geq 0$. Laat zien dat de vergelijking $\dot{\varphi} = 1 + C\cos\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$,
   - geen rustpunten heeft voor $0 \leq C < 1$;
   - één rustpunt heeft voor $C = 1$;
   - twee rustpunten heeft voor $C > 1$.
4. Teken het faseplaatje behorend bij (1). Zet ook pijltjes!
5. Schets de grafieken van de componenten $x(t)$ en $y(t)$ van de oplossing $(x(t), y(t))$ van (1) met

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Bereken $\lim_{t\to\infty} x(t)$ en $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

Z.O.Z.

Opgave 3 [20pt] Beschouw in het vlak het volgende stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dot{x} & = & -2x, \\ \dot{y} & = & y. \end{cases} \tag{2}$$

1. Teken het faseplaatje van (2).
2. Bewijs dat voor iedere oplossing $(x(t), y(t))$ van (2) met beginvoorwaarden $x(0) = 1$ en $y(0) = \eta,\ 0 < \eta \leq 1$, er een $\tau = \tau(\eta) \geq 0$ betsaat zodat $0 < x(\tau) \leq 1$ en $y(\tau) = 1$. Bereken $\tau(\eta)$ en $x(\tau(\eta))$.
3. Definieer de afbeelding $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ met

$$\eta \mapsto f(\eta) = \begin{cases} x(\tau(\eta)) & \text{als} \quad 0 < \eta \leq 1, \\ 0 & \text{als} \quad \eta = 0, \end{cases}$$

en laat zien dat deze afbeelding een contractie is op $[0, \varepsilon]$ voor een $\varepsilon > 0$ en klein genoeg.

Opgave 4 [30pt] Zij

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bewijs dat de oplossing $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ van het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy}{dx} = Ay, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

begrensd is op $\mathbb{R}$.