Deeltentamen A Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 19 april 2007, 9:00-12:00 uur

Dit deeltentamen bestaat uit vier opgaven. Het is bij dit tentamen niet toegestaan om een boek, aantekeningen of een grafische rekenmachine te gebruiken. Vergeet niet op elk ingeleverd vel uw naam, studentnummer en practicumleider (Taoufik Bakri of Slavik Koval) te zetten. Motiveer uw antwoorden. Succes!

Opgave 1 [20pt] Bewijs dat de maximale oplossing $y : I \to \mathbb{R}$ van het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy}{dx} = y - x^2 + 2x, \quad y(0) = 1,$$

voldoet aan $y(x) > x^2$ voor alle $x \in I$.

Methode I. De differentiaalvergelijking is een inhomogene lineaire differentiaalvergelijking die met de variatie van constanten opgelost kan worden.

We zoeken dus de oplossing in de vorm $y(x) = C(x)e^x$. Uit $y(0) = 1$ volgt dat $C(0) = 1$. Verder geldt dat

$$C'e^x + Ce^x = Ce^x - x^2 + 2x$$

ofwel

$$C' = (2x - x^2)e^{-x}.$$

Dus

$$C(x) = C(0) + \int_0^x (2\xi - \xi^2)e^{-\xi} d\xi = 1 + x^2 e^{-x}$$

en

$$y(x) = (1 + x^2 e^{-x})e^x = e^x + x^2.$$

Deze oplossing is gedefinieerd op $I = \mathbb{R}$ en voldoet aan $y(x) > x^2$ voor alle $x \in I$.

Methode II. De functie $f(x, y) = y - x^2 + 2x$ is continu in (x, y) en Lipschitz-continu in y, zodat het beginwaardeprobleem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, een eenduidig maximale oplossing heeft voor iedere (x_0, y_0).

Merk op dat de functie $z(x) = x^2$ aan dezelfde differentiaalvergelijking voldoet als $y(x)$ maar een andere beginwaarde heeft, nl. $z(0) = 0$. Dus geldt $y(x) \neq z(x)$ voor iedere $x \in I$. Uit $y(0) > z(0)$ volgt dan dat $y(x) > z(x)$ ofwel $y(x) > x^2$ voor alle $x \in I$.

Opgave 2 [30pt] Beschouw het volgende stelsel van nietlineaire differentiaalvergelijkingen in het vlak:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y - xy, \\ \dot{y} &= x + x^2. \end{cases} \tag{1}$$

1. Bereken alle rustpunten van (1).

   De coordinaten van de rustpunten voldoen aan het stelsel

   $$\begin{cases} -y - xy &= 0, \\ x + x^2 &= 0, \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} y(1+x) &= 0, \\ x(1+x) &= 0, \end{cases}$$

   waaruit blijkt dat $E_0 = (0, 0)$ en $E_1(\eta) = (1, \eta)$ met iedere $\eta \in \mathbb{R}$ de rustpunten van (1) zijn. We hebben dus een geisoleerde rustpunt in de oorsprong en de lijn $x = -1$ van rustpunten.

2. Maak de transformatie naar poolcoordinaten $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$. Laat zien dat het stelsel (1) onder deze transformatie overgaat in het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \dot\rho &= 0, \\ \dot\varphi &= 1 + \rho\cos\varphi. \end{cases}$$

We hebben

$$\begin{array}{rclcl} \dot x &=& \dot\rho\cos\varphi - \dot\varphi\rho\sin\varphi &=& -\rho\sin\varphi - \rho^2\sin\varphi\cos\varphi, \\ \dot y &=& \dot\rho\sin\varphi + \dot\varphi\rho\cos\varphi &=& \rho\cos\varphi + \rho^2\cos^2\varphi. \end{array} \tag{2}$$

Uit (2) volgt dat

$$\begin{cases} \dot\rho\cos^2\varphi - \dot\varphi\rho\sin\varphi\cos\varphi &= -\rho\sin\varphi\cos\varphi - \rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi, \\ \dot\rho\sin^2\varphi + \dot\varphi\rho\sin\varphi\cos\varphi &= \rho\sin\varphi\cos\varphi + \rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Door deze twee vergelijkingen optellen krijgen we

$$\dot\rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 0$$

ofwel $\dot\rho = 0$.

Uit (2) volgt ook dat

$$\begin{cases} \dot\rho\sin\varphi\cos\varphi - \dot\varphi\rho\sin^2\varphi &= -\rho\sin^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi\cos\varphi, \\ \dot\rho\sin\varphi\cos\varphi + \dot\varphi\rho\cos^2\varphi &= \rho\cos^2\varphi + \rho^2\cos^3\varphi. \end{cases}$$

Trek de eerste vergelijking van de tweede af. Dit geeft

$$\dot\varphi\rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \rho^2\cos\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

ofwel

$$\dot\varphi\rho = \rho + \rho^2\cos\varphi$$

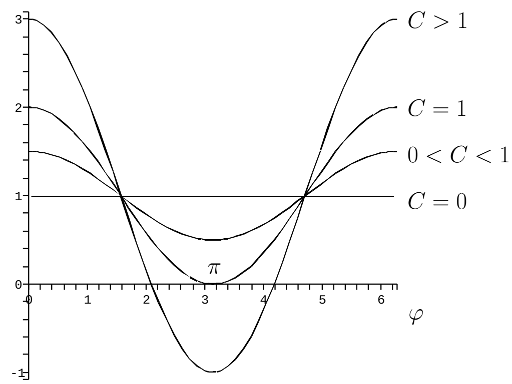
en $\dot\varphi = 1 + \rho\cos\varphi$.

3. Uit de differentiaalvergelijking voor ρ volgt dat $\rho(t) = C$ met een $C \geq 0$. Laat zien dat de vergelijking $\dot\varphi = 1 + C\cos\varphi,\ \varphi \in [0, 2\pi]$,

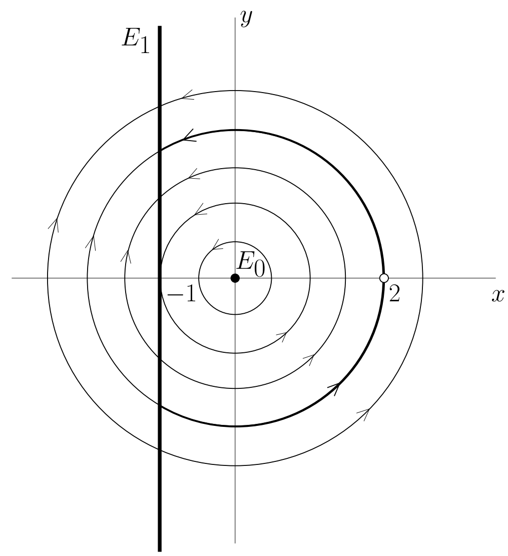
   - geen rustpunten heeft voor $0 \leq C < 1$;
   - één rustpunt heeft voor $C = 1$;
   - twee rustpunten heeft voor $C > 1$.

De vergelijking $1 + C\cos\varphi = 0$ heeft (zie figuur)

- geen oplossingen met $\varphi \in [0, 2\pi]$ voor $0 \leq C < 1$;
- één oplossing $\varphi_0 = \pi \in [0, 2\pi]$ voor $C = 1$;
- twee oplossingen $\varphi_{1,2} \in [0, 2\pi]$ voor $C > 1$.



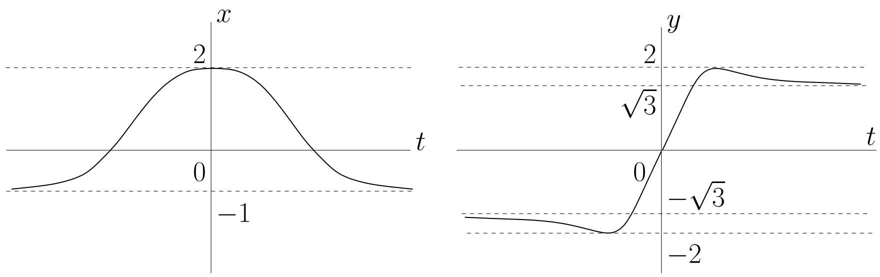
4. Teken het faseplaatje behorend bij (1). Zet ook pijltjes!



5. Schets de grafieken van de componenten $x(t)$ en $y(t)$ van de oplossing $(x(t), y(t))$ van (1) met

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bereken $\lim_{t\to\infty} x(t)$ en $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

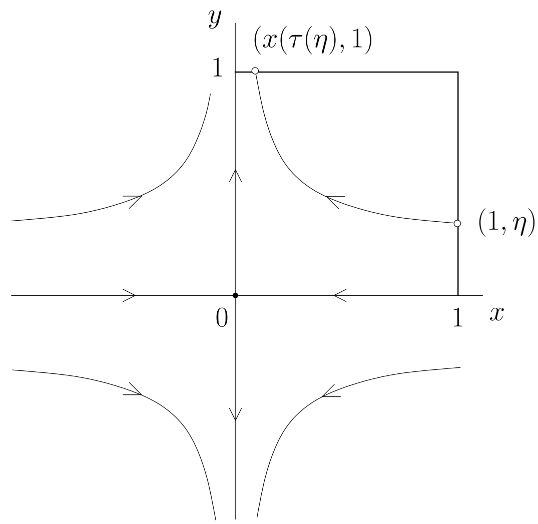


$$\lim_{t\to\infty} x(t) = -1, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = \sqrt{3}.$$

Opgave 3 [20pt] Beschouw in het vlak het volgende stelsel van lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -2x, \\ \dot{y} & = & y. \end{array} \right. \tag{3}$$

1. Teken het faseplaatje van (3).



2. Bewijs dat voor iedere oplossing $(x(t), y(t))$ van (3) met beginvoorwaarden $x(0) = 1$ en $y(0) = \eta,\ 0 < \eta \leq 1$, er een $\tau = \tau(\eta) \geq 0$ betsaat zodat $0 < x(\tau) \leq 1$ en $y(\tau) = 1$. Bereken $\tau(\eta)$ en $x(\tau(\eta))$.

De oplossing van (3) met de beginvoorwaarden $(x(0), y(0)) = (1, \eta)$ is

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ \eta e^{t} \end{pmatrix}.$$

De vergelijking $y(\tau) = 1$ is equivalent met $\eta e^{\tau} = 1$ en heeft voor $\eta \in (0, 1]$ de unique oplossing

$$\tau(\eta) = \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) = -\ln\eta \geq 0.$$

Dus $x(\tau(\eta)) = e^{-2\tau(\eta)} = e^{2\ln\eta} = \left(e^{\ln\eta}\right)^2 = \eta^2.$

3. Definieer de afbeelding $f : [0,1] \to [0,1]$ met

$$\eta \mapsto f(\eta) = \begin{cases} x(\tau(\eta)) & \text{als} \quad 0 < \eta \le 1, \\ 0 & \text{als} \quad \eta = 0, \end{cases}$$

en laat zien dat deze afbeelding een contractie is op $[0, \varepsilon]$ voor een $\varepsilon > 0$ en klein genoeg.

De afbeelding $f : [0,1] \to [0,1]$ is continu and gegeven door de formule $f(\eta) = \eta^2$. Voor iedere $\varepsilon \in (0,1)$ hebben we $f([0,\varepsilon]) = [0,\varepsilon^2] \subset [0,\varepsilon]$. Verder geldt

$$|f(\eta) - f(\zeta)| = |\eta^2 - \zeta^2| = |(\eta+\zeta)(\eta-\zeta)| = |\eta+\zeta||\eta-\zeta| \le (|\eta| + |\zeta|)|\eta-\zeta|.$$

Veronderstel dat $\eta, \zeta \in [0,\varepsilon]$ met $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$. Dan

$$|\eta| + |\zeta| < \frac{2}{3}.$$

Er bestaat dus een $\theta \in [0,1)$ zodat $|\eta| + |\zeta| \le \theta$ voor alle $\eta, \zeta \in [0,\varepsilon]$. Hieruit volgt dat

$$|f(\eta) - f(\zeta)| \le \theta|\eta - \zeta|, \quad 0 \le \theta < 1,$$

voor alle $\eta, \zeta \in [0,\varepsilon]$. Dit bewijst dat f een contractie is op $[0,\varepsilon]$.

Opgave 4 [30pt] Zij

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bewijs dat de oplossing $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ van het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy}{dx} = Ay, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

begrensd is op $\mathbb{R}$.

De karakteristieke vergelijking $\det(A - \lambda E) = 0$ voor A is equivalent met

$$(1+\lambda)(1+\lambda^2) = 0.$$

Er zijn dus drie enkelvoudige eigenwaarden: $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_{2,3} = \pm i$.

Bij de eigenwaarde $\lambda_1 = -1$ van A hoort de eigenvector

$$\eta^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bij de eigenwaarden $\lambda_{2,3} = \pm i$ van A horen de eigenvectoren

$$\eta^{(2)} = \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \eta^{(3)} = \bar{\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verder kunnen we op minstens drie manieren werken.

Methode I. Iedere oplossing van $y' = Ay$ is een complex-lineaire combinatie van de basis oplossingen $e^{-x}\eta^{(1)}, e^{ix}\eta^{(2)}$, en $e^{-ix}\eta^{(3)}$, ofwel

$$y(x) = ae^{-x}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + be^{ix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} + ce^{-ix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

met $a, b, c \in \mathbb{C}$. De beginvoorwaarde impliceert de vergelijking

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

die equivalent is met het lineair stelsel

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a+b+c &=& 1, \\ a+(1+i)b+(1-i)c &=& 2, \\ a+b+c &=& 1. \end{array}\right.$$

Dus

$$a = 0, \quad b = \frac{1-i}{2}, \quad c = \frac{1+i}{2}$$

en

$$y(x) = \frac{1-i}{2}e^{ix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1+i}{2}e^{-ix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) + \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}) \\ e^{ix}+e^{-ix} \\ \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) + \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ 2\cos x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix}.$$

Deze oplossing is periodiek in x met periode 2π en dus is begrensd op $\mathbb{R}$.

Methode II. De fundamentale matrix oplossing is

$$\Phi(x) = \left(\eta^{(1)}e^{-x} \;\middle|\; \eta^{(2)}e^{ix} \;\middle|\; \eta^{(3)}e^{-ix}\right) = \begin{pmatrix} 2e^{-x} & e^{ix} & e^{-ix} \\ e^{-x} & (1+i)e^{ix} & (1-i)e^{-ix} \\ e^{-x} & e^{ix} & e^{-ix} \end{pmatrix}$$

met

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1+i & 1-i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad [\Psi(0)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & 1+\frac{i}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{i}{2} & 1-\frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

De stromingmatrix is

$$e^{xA} = \Phi(x)[\Phi(0)]^{-1}] = \begin{pmatrix} 2e^{-x} - \cos x & \sin x & -2e^{-x} + 2\cos x - \sin x \\ e^{-x} - \cos x + \sin x & \cos x + \sin x & -e^{-x} + \cos x - 3\sin x \\ e^{-x} - \cos x & \sin x & -e^{-x} + 2\cos x - \sin x \end{pmatrix}.$$

De oplossing met de gegeven beginvoorwaarde, nl.

$$y(x) = e^{xA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ 2\cos x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix},$$

is dezelfde periodieke oplossing als bij Methode I.

Methode III. De ruimte $\mathbb{R}^3$ is de direkte som van twee invariante lineaire deelverzamelingen van matrix A:

$$Y_1 = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : y = u\eta^{(1)}, \quad u \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{en} \quad Y_2 = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : y = \frac{1}{2}(z\eta + \bar{z}\bar{\eta}), \quad z \in \mathbb{C} \right\},$$

die ook de invariante deelverzamelingen van e^{xA} zijn voor iedere $x \in \mathbb{R}$.

Alle oplossingen met $y(0) \in Y_2$ zijn periodiek, omdat de restrictie van $y' = Ay$ naar Y_2 een lineire stelsel in het vlak is met een 2×2 matrix die de eigenwaarden $\pm i$ heeft (het *centrumpunt*). Voor de beginvoorwaarde geldt dat

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(z\eta + \bar{z}\bar{\eta})$$

met $z = 1 - i$. Dus geldt $y(0) \in Y_2$ en $y(x)$ is periodiek en begrensd op $\mathbb{R}$.