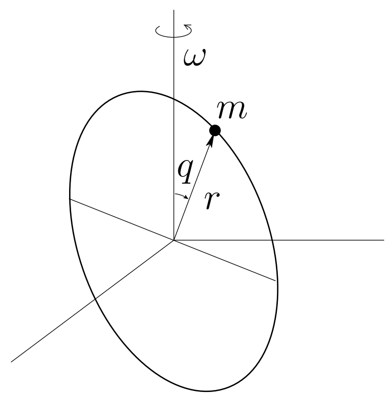
Deeltentamen B Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 5 juli 2007, 9:00-12:00

Dit deeltentamen bestaat uit drie opgaven. Het is bij dit tentamen niet toegestaan om een boek, aantekeningen of een grafische rekenmachine te gebruiken. Vergeet niet op elk ingeleverd vel uw naam, studentnummer en practicumleider (Taoufik Bakri of Slavik Koval) te zetten. Motiveer uw antwoorden. Succes!

Opgave 1 [40pt]
De wrijvingsloze beweging van een puntmassa m langs een hoepel met straal r, die om de verticale as draait met hoeksnelheid ω, wordt beschreven door de differentiaalvergelijking

$$M\frac{d^2q}{dt^2} = -U'(q), \quad U(q) = A\cos q - B\sin^2 q, \tag{1}$$

waarin $q = q(t)$ de hoek is tussen de verticale as en de straalvector naar de massa (zie figuur). In (1) zijn $M = mr^2,\ A = mrg,\ B = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$, waarbij g de zwaartekrachtsversnelling is.



1. Herschrijf (1) als een stelsel van differentiaalvergelijkingen voor q en $v = \dot{q}$. Vind alle ruspunten van dit stelsel voor $2B < A$ en $2B > A$.

2. Schets de faseplaatjes van (1) voor $2B < A$ en $2B > A$, d.w.z. teken de banen van het stelsel in het (q, v)-vlak. Zet ook pijltjes.

3. Interpreteer de resultaten voor dit mechanische systeem, m.a.w. beschrijf welke bewegingen van m horen bij de rustpunten, periodieke en niet-periodieke banen in het (q, v)-vlak.

Z.O.Z.

Opgave 2 [40pt] Beschouw het volgende randwaardeprobleem

$$x^3y''' + xy' - y = 0, \quad y(1) = 1, \ y'(1) = -1, \ y(e) = e. \tag{2}$$

1. Introduceer de differentiaaloperator $(Ly)(x) = x^3y'''(x) + xy'(x) - y(x)$ en laat zien dat

   $$L(x^r) = f(r)x^r, \tag{3}$$

   waarin $f(r)$ een polynoom van graad 3 is.

2. Bewijs dat f één nulpunt heeft met multipliciteit drie. Vind drie verschillende oplossingen van $Ly = 0$ (*Hint*: Bereken de afgeleiden van (3) naar r.)

3. Bewijs dat de gevonden oplossingen lineair-onafhankelijk zijn op $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

4. Schrijf de algemene oplossing van $Ly = 0$ op $\mathbb{R}_+$ en los het randwaardeprobleem (2) op.

Opgave 3 [20pt] Het volgende beginwaardeprobleem voor de *Lane-Emden* differentiaalvergelijking

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y^\mu = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0, \tag{4}$$

onstaat bij de studie van zelfgraviterende gasbollen in de Sterrenkunde. Hierin is $\mu > 1$, zodat de differentiaalvergelijking in (4) niet-lineair is.

Het is bekend dat de oplossing van (4) een convergente matchreeksontwikkeling heeft in het punt $x = 0$. Bereken voor kleine $|x|$ een approximatie van deze oplossing met een veelterm van graad 4, d.w.z. vind c_k met $k \leq 4$ in de machtreeks

$$y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + O(x^5).$$

Hint: Gebruik de Taylorontwikkeling van $(1 + h)^\mu$ in $h = 0$.