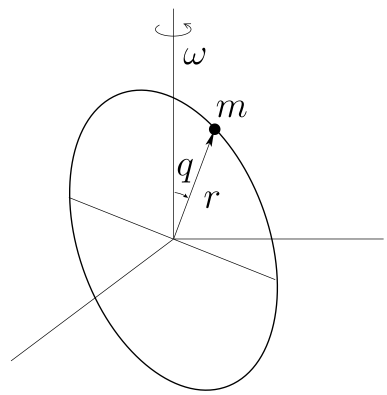
Deeltentamen B Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 5 juli 2007, 9:00-12:00

Dit deeltentamen bestaat uit drie opgaven. Het is bij dit tentamen niet toegestaan om een boek, aantekeningen of een grafische rekenmachine te gebruiken. Vergeet niet op elk ingeleverd vel uw naam, studentnummer en practicumleider (Taoufik Bakri of Slavik Koval) te zetten. Motiveer uw antwoorden. Succes!

Opgave 1 [40pt]
De wrijvingsloze beweging van een puntmassa m langs een hoepel met straal r, die om de verticale as draait met hoeksnelheid ω, wordt beschreven door de differentiaalvergelijking

$$M\frac{d^2q}{dt^2} = -U'(q), \quad U(q) = A\cos q - B\sin^2 q, \tag{1}$$

waarin $q = q(t)$ de hoek is tussen de verticale as en de straalvector naar de massa (zie figuur). In (1) zijn $M = mr^2,\ A = mrg,\ B = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$, waarbij g de zwaartekrachtsversnelling is.



1. Herschrijf (1) als een stelsel van differentiaalvergelijkingen voor q en $v = \dot{q}$. Vind alle ruspunten van dit stelsel voor $2B < A$ en $2B > A$.

   Het equivalente stelsel van differentiaalvergelijkingen voor q en $v = \dot{q}$ is

$$\begin{cases} \dot{q} &= v, \\ \dot{v} &= \dfrac{2B}{M}\left(\dfrac{A}{2B} + \cos q\right)\sin q. \end{cases}$$

   De coördinaten (q, v) van de rustpunten voldoen aan het stelsel

$$\begin{cases} v &= 0, \\ \left(\dfrac{A}{2B} + \cos q\right)\sin q &= 0. \end{cases}$$

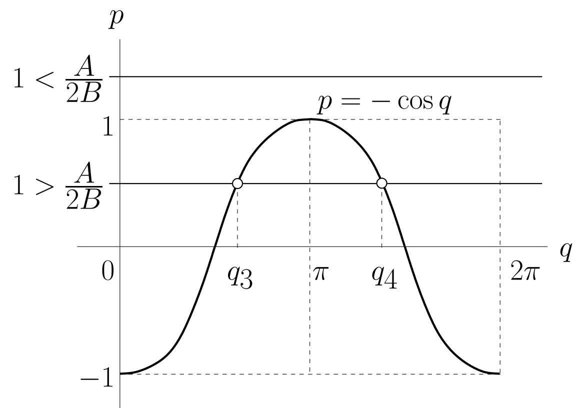
   Wegens de 2π-periodiciteit van het vectorveld in q, is het voldoende om alleen de ruspunten met $q \in [0, 2\pi]$ te beschouwen. Deze zijn

$$E_0 = (0,0), \quad E_1 = (0,\pi), \quad E_2 = (0, 2\pi)$$

(voor alle $A, B > 0$) en

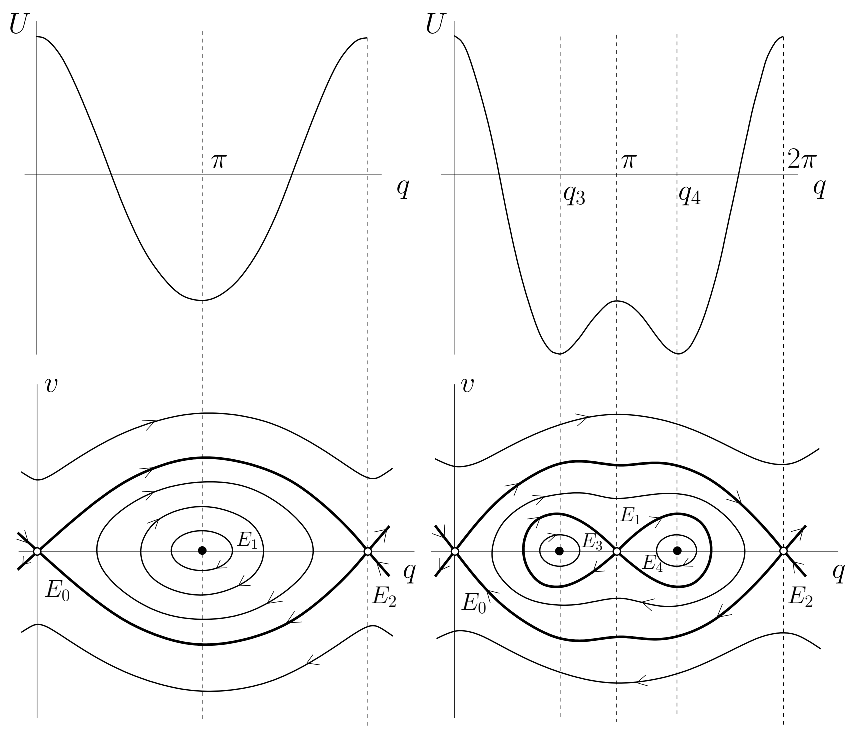
$$E_{3,4} = (0, q_{3,4}), \quad q_3 = \arccos\left(-\frac{A}{2B}\right), q_4 = 2\pi - q_3.$$

(voor $2B > A > 0$). Zie figuur.



2. Schets de faseplaatjes van (1) voor $2B < A$ en $2B > A$, d.w.z. teken de banen van het stelsel in het (q, v)-vlak. Zet ook pijltjes.

De potentiële energie $U(q)$ heeft een maximum in de punten $q = 0$ en $q = 2\pi$ voor alle $A, B > 0$, waaruit volgt dat de rustpunten E_0 en E_3 zadelpunten zijn. Voor $2B < A$ heeft de functie $U(q)$ een mininum in het punt $q = \pi$, zodat het rustpunt E_2 een centrumpunt is. Voor $2B > A$ heeft U een maximum in $q = \pi$ en twee (gelijke) minima in $q_{3,4}$. Dit impliceert dat voor $2B > A$ het rustpunt E_2 een zadelpunt is. De rustpunten $E_{3,4}$ zijn it dit geval de centrumpunten. Voor de rest van de faseplaatjes van (1), zie figuur.



Merk op dat de faseplaatjes spiegel-symmetrisch zijn t.a.v. de verticale lijn $q = \pi$.

3. Interpreteer de resultaten voor dit mechanische systeem, m.a.w. beschrijf welke bewegingen van m horen bij de rustpunten, periodieke en niet-periodieke banen in het (q, v)-vlak.

In het coördinaatenstelsel die met de hoepel om de verticale as draait is:

$E_0(E_2)$	een evenwicht in de hoogste positie op de hoepel
E_1	een evenwicht in de laagste positie op de hoepel
$E_{3,4}$	twee symmetrische evenwichten buiten de verticale as

De laatste twee evenwichten bestaan mits ω groot genoeg is, n.l. als $2B > A$ ofwel

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Bij periodieke banen rondom E_1 of $E_{3,4}$ horen periodieke slingerbewegingen van m om de evenwichten. De niet-periodieke banen die naar een zadelpunt gaan als $t \to +\infty$ of $t \to -\infty$ beschrijven asymptotische bewegingen naar/van deze rustpunten. Andere banen beschrijven periodieke rotaties van m langs de hoepel met of tegen de clock.

In het oorspronkelijk coördinaatenstelsel corresponderen de rustpunten $E_{3,4}$ met $\frac{2\pi}{\omega}$-periodieke bewegingen, terwijl bij de periodieke banen óf periodieke óf quasi-periodieke bewegingen horen.

Opgave 2 [40pt] Beschouw het volgende randwaardeprobleem

$$x^3y''' + xy' - y = 0, \quad y(1) = 1, \; y'(1) = -1, \; y(e) = e. \tag{2}$$

1. Introduceer de differentiaaloperator $(Ly)(x) = x^3y'''(x) + xy'(x) - y(x)$ en laat zien dat

$$L(x^r) = f(r)x^r, \tag{3}$$

waarin $f(r)$ een polynoom van graad 3 is.

We hebben

$$L(x^r) = x^3r(r-1)(r-2)x^{r-3} + xrx^{r-1} - x^r = (r^3 - 3r^2 + 3r - 1)x^r = (r-1)^3x^r,$$

zodat $f(r) = (r-1)^3$, een polynoom van graad 3.

2. Bewijs dat f één nulpunt heeft met multipliciteit drie. Vind drie verschillende oplossingen van $Ly = 0$ (*Hint*: Bereken de afgeleiden van (3) naar r.)

Er geldt $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$ maar $f'''(1) = 6 \neq 0$, waaruit volgt dat $r = 1$ een nulpunt van f is met multipliciteit drie. Er zijn geen andere nulpunten. Dus is $y_1(x) = x^1 = x$ een oplossing van $Ly = 0$.

De eerste en tweede afgeleiden van (3) naar r geven

$$\begin{aligned} L\left(\frac{\partial}{\partial r}x^r\right) &= 3(r-1)^2x^r + (r-1)^3x^r \ln x, \\ L\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}x^r\right) &= 6(r-1)x^r + 6(r-1)^2x^r \ln x + (r-1)^3x^r(\ln x)^2, \end{aligned}$$

omdat

$$\frac{\partial^k}{\partial r^k} x^r = \frac{\partial^k}{\partial r^k} e^{r \ln x} = x^r (\ln x)^k.$$

Dus zijn

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial r} x^r \bigg|_{r=1} = x \ln x, \quad y_3(x) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} x^r \bigg|_{r=1} = x(\ln x)^2$$

twee andere oplossingen van $Ly = 0$.

3. Bewijs dat de gevonden oplossingen lineair-onafhankelijk zijn op $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

De Wronski-determinant van de oplossingen

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x \ln x & x(\ln x)^2 \\ 1 & 1 + \ln x & (2 + \ln x) \ln x \\ 0 & \dfrac{1}{x} & \dfrac{2(1 + \ln x)}{x} \end{vmatrix}$$

is gelijk in het punt $x = 1$ aan

$$w(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Omdat $w(1) \neq 0$ zijn de gevonden oplossingen lineair-onafhankelijk op $\mathbb{R}_+$.

4. Schrijf de algemene oplossing van $Ly = 0$ op $\mathbb{R}_+$ en los het randwaardeprobleem (2) op.

De algemene oplossing van $Ly = 0$ op $\mathbb{R}_+$ is dus

$$y(x) = Ax + Bx \ln x + Cx(\ln x)^2$$

met $A, B, C \in \mathbb{R}$. We hebben $y'(x) = A + B(1 + \ln x) + C(2 + \ln x) \ln x$. De randvoorwaarden in (2) zijn equivalent met het stelsel

$$\begin{cases} A & = & 1, \\ A + B & = & -1, \\ A + B + C & = & 1, \end{cases}$$

waaruit volgt $A = 1, B = -2, C = 2$. Dus is de oplossing van (2) gegeven door

$$y(x) = x - 2x \ln x + 2x(\ln x)^2.$$

Opgave 3 [20pt] Het volgende beginwaardeprobleem voor de *Lane-Emden* differentiaalvergelijking

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y^\mu = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0, \tag{4}$$

onstaat bij de studie van zelfgraviterende gasbollen in de Sterrenkunde. Hierin is $\mu > 1$, zodat de differentiaalvergelijking in (4) niet-lineair is.

Het is bekend dat de oplossing van (4) een convergente matchreeksontwikkeling heeft in het punt $x = 0$. Bereken voor kleine $|x|$ een approximatie van deze oplossing met een veelterm van graad 4, d.w.z. vind c_k met $k \leq 4$ in de machtreeks

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + O(x^5).$$

Hint: Gebruik de Taylorontwikkeling van $(1+h)^\mu$ in $h=0$.

We hebben $c_0 = y(0) = 1, c_1 = y'(0) = 0$. Dus geldt $y(x) = 1 + h(x)$ met

$$h(x) = c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + O(x^5).$$

De substitutie van $y = 1 + h(x)$ in de differentiaalvergelijking (4) geeft

$$2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + O(x^3) + 2(2c_2 + 3c_3x + 4c_4x^2 + O(x^3)) + (1 + c_2x^2 + O(x^3))^\mu = 0.$$

De Taylorontwikkeling van $(1+h)^\mu$ in $h=0$ is

$$(1+h)^\mu = 1 + \mu h + \frac{\mu(\mu-1)}{2}h^2 + O(h^3),$$

waaruit volgt dat

$$(1 + c_2x^2 + O(x^3))^\mu = 1 + \mu c_2x^2 + O(x^3).$$

Dit impliceert

$$2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 2(2c_2 + 3c_3x + 4c_4x^2) + 1 + \mu c_2x^2 + O(x^3) = 0.$$

Verzamel hierin alle termen met x^k voor $k = 0, 1$ en 2. Dit geeft

$$\begin{aligned} x^0: &\quad 6c_2 + 1 = 0, \\ x^1: &\quad 12c_3 = 0, \\ x^2: &\quad 20c_4 + \mu c_2 = 0, \end{aligned}$$

een stelsel lineaire vergelijkingen voor c_2, c_3 en c_4 met de oplossing

$$c_2 = -\frac{1}{6}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{\mu}{120}.$$

Dus wordt de approximatie van de oplossing gegeven door

$$\tilde{y}(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{\mu x^4}{120}.$$