DEPARTEMENT INFORMATICA EN INFORMATIEKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A−Eskwadraat.
HET COLLEGE INFOGR WERD IN 2005-2006 GEGEVEN DOOR RENE VAN OOSTRUM.

Graphics, toets 1 (INFOGR)
13 oktober 2005

- Deze toets bestaat uit drie opgaven met in totaal twaalf sub-opgaven.
- Het maximum aantal te behalen punten is 11. Uw cijfer voor deze toets is het minimum van 10 en het aantal door u behaalde punten.
- Bij deze toets mogen boek, aantekeningen en rekenmachines *niet* gebruikt worden.
- Schrijf op ieder antwoordvel uw naam en collegekaartnummer.
- Wanneer u voortijdig klaar bent, kunt u uw werk inleveren en de zaal verlaten, behalve tijdens het eerste half uur van deze toets.
- Noteer bij het inleveren van uw werk uw naam en collegekaartnummer op de voor in de zaal klaarliggende lijst.

Opgave 1. Cirkels, ellipsen en lijnen

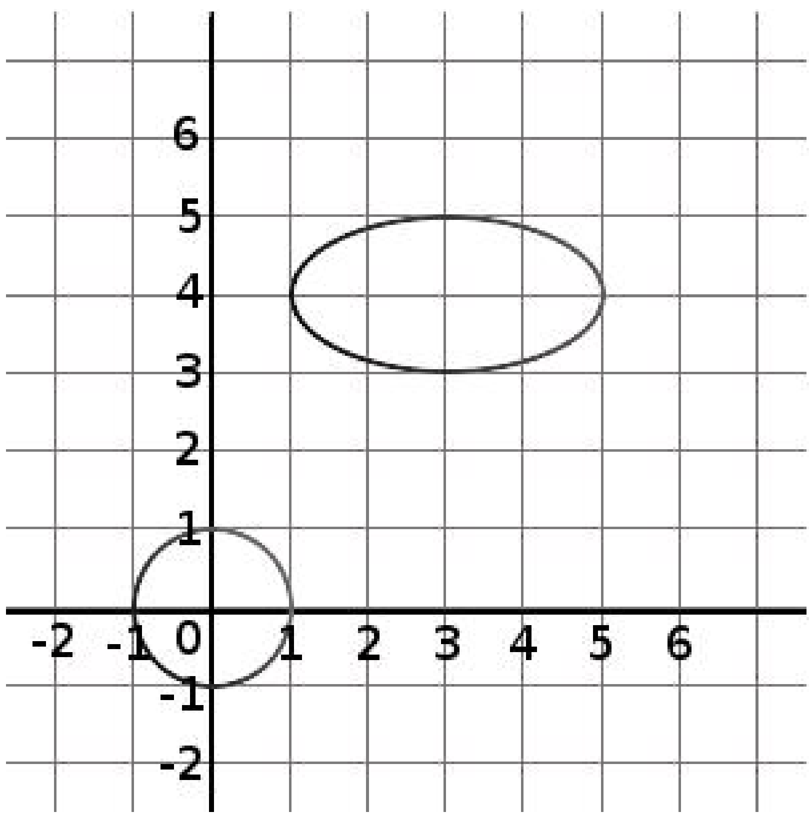

Figure 1: De ellips E en de cirkel C

Wanneer we (bijvoorbeeld met ray tracing) een bol projecteren op een vlak door middel van perspectieve projectie krijgen we een ellips. Een ellips is in feite niet meer dan een in twee richtingen geschaalde cirkel, waarbij de schalingsfactoren in beide richtingen niet gelijk hoeven te zijn. In het plaatje (figuur 1) zien we een ellips met een horizontale en verticale hoofdas; de ellips E gaat door de punten $(1, 4)$, $(3, 3)$, $(5, 4)$ en $(3, 5)$.

Daarnaast bekijken we de lijn ℓ die gegeven is door de volgende impliciete vergelijking: $\ell : 2x - 3y + 6 = 0$. Deze lijn staat niet in het plaatje, maar het kan handig zijn om hem erbij te tekenen.

De lijn ℓ en de ellips E hebben twee snijpunten s_1 en s_2. We willen die snijpunten bepalen. Dat lijkt lastig, maar geen paniek: we kunnen dat doen met de technieken die we in het college Graphics hebben gezien. Van belang is dat we ons realiseren dat de ellips in het plaatje een geschaalde en getransleerde versie is van de (eveneens in het plaatje getekende) eenheidscirkel C.

a) Geef de parametrische vergelijking van de cirkel C met middelpunt $(0, 0)$ en straal 1. *(0 punten)*

b) Geef de matrix M die de cirkel C transformeert naar de ellips E. *(1 punt)*

c) Geef de parametrische vergelijking van de ellips E (die we vinden met behulp van de antwoorden bij a en b). *(1 punt)*

   Het bepalen van de snijpunten van ℓ en E is in eerste instantie lastig. Maar: stel dat we de inverse matrix M^{-1} van M zouden hebben, dan zouden we de lijn ℓ kunnen transformeren naar de lijn $\ell' = M^{-1}\ell$. Verder weten we dat $M^{-1}E = C$. We kunnen nu de snijpunten s'_1 en s'_2 van ℓ' en C bepalen. Het handige van affiene transformaties is dat snijpunten behouden blijven, met andere woorden: De snijpunten van ℓ' en C transformeren naar de snijpunten van ℓ en E wanneer we de matrix M toepassen. Dat gaan we gebruiken.

   Geef de inverse M^{-1} van de matrix M die u in opgave b) hebt gevonden. Het inverteren van matrices is in het algemeen een hoop werk, maar in dit geval valt het nogal mee. Gaussische eliminatie geeft in enkele eenvoudige stappen de gevraagde inverse matrix (maar er zijn ook andere manieren om M^{-1} te bepalen). *(1 punt)*

d) We kunnen M^{-1} niet zonder meer op ℓ loslaten; daarvoor hebben we een parametrische vergelijking van ℓ nodig. Geef een parametrische vergelijking van ℓ. *(1 punt)*

e) Geef nu, met behulp van uw antwoorden bij de vragen d) en e), de parametrische vergelijking van ℓ'. *(1 punt)*

f) Bepaal de snijpunten s'_1 en s'_2 van ℓ' en C. Een mogelijke oplossingsmethode: geef een impliciete vergelijking van ℓ', stel die gelijk aan de impliciete vergelijking voor C, en los de resulterende kwadratische vergelijking op. Ter controle: wanneer we de coördinaten van s'_1 en s'_2 in decimale notatie schrijven, is één plaats achter de komma voldoende om de coördinaten te specificeren. *(1 punt)*

g) Bepaal tenslotte de snijpunten s_1 en s_2 van de ellips E en de oorspronkelijke lijn ℓ. *(1 punt)*

Opgave 2. Rotaties in 3D

We willen de matrix R bepalen voor de rotatie met een hoek van $45°$ om de vector $(1, 2, 2)$. We doen dat als volgt: we bepalen eerst de matrix M die de gegeven vector uitlijnt met de z-as. Vervolgens stellen we de matrix R' op voor de rotatie met een hoek van $45°$ om de z-as. Tenslotte berekenen we R als volgt: $R = M^{-1}R'M$.

Om M te bepalen zoeken we een orthonormaal stelsel van vectoren u, v en w, zodanig dat w dezelfde richting heeft als de gegeven vector $(1, 2, 2)$. We doen dat in twee stappen. Eerst zoeken we voor de gegeven vector (die we voor het gemak w' noemen) twee vectoren u' en v', zodanig dat

u', v' en w' loodrecht op elkaar staan. Vervolgens normaliseren we u', v' en w' tot respectievelijk u, v en w. Deze methode is iets anders dan die in het boek en het college zijn besproken, maar maakt het handmatig rekenwerk wat eenvoudiger.

In 2D is het erg eenvoudig om voor een gegeven vector (a, b) een vector te vinden die er loodrecht op staat. Er zijn oneindig veel van zulke vectoren, maar er zijn er precies twee die even lang zijn als (a, b), en die twee hebben tegengestelde richting: $(-b, a)$ en $(b, -a)$. Met behulp van de definitie van het inproduct is eenvoudig in te zien dat deze twee vectoren inderdaad loodrecht op (a, b) staan. Dit idee kunnen we gebruken om ook in 3D heel eenvoudig een vector te vinden die loodrecht op w' staat.

a) Geef een vector u' die loodrecht op w' staat. *(1 punt)*

b) Geef een vector v' die loodrecht op zowel w' als u' staat. *(1 punt)*

c) Bepaal nu door normalisering van u', v' en w' een drietal u, v en w (de getallen zijn niet bijzonder fraai, maar het rekenwerk valt nogal mee), en geef met behulp daarvan de matrix M. Ter controle: wanneer we M loslaten op de gegeven vector $(1, 2, 2)$ moet de resulterende vector parallel zijn met de z-as. *(1 punt)*

Opgave 3. Perspectieve projectie

We hebben in het college en in het boek gezien hoe we perspectieve projectie kunnen doen door de projectie in een aantal stappen op te breken, de matrices voor die stappen te bepalen en met matrixvermenigvuldigingen te combineren tot één enkele matrix M, en de resulterende matrix M los te laten op de vertices van de polygonen in ons model. Tenslotte moeten er dan nog delingen worden uitgevoerd om op de pixelcoördinaten van de geprojecteerde vertices uit te komen.

a) Leg uit wat de bovengenoemde stappen zijn (u hoeft niet de matrices voor de stappen uit te werken), hoe de matrices gecombineerd worden tot de matrix M en leg uit waarom er aan het eind nog delingen moeten worden uitgevoerd. *(1 punt)*