Universiteit Utrecht
Faculteit Wiskunde en Informatica

Examen Optimalisering op maandag 18 april 2005, 9.00-12.00 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- **Mobieltjes UIT** en diep weggestopt.
- Het gebruik van een **rekenmachine** is **niet toegestaan**.
- Het is **niet** de bedoeling dat u meer dan één iteratie uitvoert. U moet wel steeds het **volledige, nieuwe tableau bepalen**.
- Voor de onderdelen 1c, 1d, 1e, 1f en 2a zijn voorgedrukte tableaus uitgedeeld.
- Het examen omvat vier opgaven, verdeeld over vier bladzijden.
- Vanaf woensdag (?) kunt u uw mening over dit vak (en andere vakken) kwijt op de evaluatie-site.

Op de verschillende onderdelen kan maximaal worden gescoord (totaal 60 punten):
Opgave 1: (a) 3 punten, (b) 9 punten, (c) 3 punten, (d) 3 punten, (e) 4 punten, (f) 4 punten, (g) 4 punten.
Opgave 2: (a) 4 punten, (b) 3 punten.
Opgave 3: (a) 6 punten, (b) 2 punten, (c) 3 punten.
Opgave 4: (a) 3 punten, (b) 3 punten, (c) 3 punten, (d) 3 punten.

Succes!

===

Opgave 1.
Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcl}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} & z & = & -3x_1 & + & c_2x_2 & + & c_3x_3 & & \\
 & \text{o.v.} & & & 2x_1 & + & x_2 & + & a_{13}x_3 & \leq & b_1 \\
 & & & & 3x_1 & + & 2x_2 & + & a_{23}x_3 & \leq & b_2 \\
 & & & & x_1 & + & x_2 & + & a_{33}x_3 & \leq & b_3 \\
 & & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

(a) Voer spelingsvariabelen x_4, x_5, x_6 in. Gegeven dat $b_1 \geq 0$, $b_2 < 0$ en $b_3 < 0$, geef het starttableau voor de eerste fase.

(b) Na een aantal iteraties is het volgende tableau voor het tweede fase probleem gevonden

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
a	0	0	0	-1	-2	z_0
b	0	0	1	-2	3	5
c	1	0	0	1	-1	3
d	0	1	0	1	-2	8

Bepaal **met behulp van het tableau** B^{-1}, $c_B B^{-1}$ en de huidige oplossing (punt en waarde); **motiveer uw antwoord**. Bepaal B en de correcte waarden voor c_2, c_3, a_{13}, $a_{23}, a_{33}, b_1, b_2, b_3, a, b, c, d, z_0$. **Ga daarbij uit van de instantie die aan het begin van deze opgave is gegeven met daaraan toegevoegd de spelingsvariabelen**.
N.B.. Indien u B of B^{-1} niet hebt kunnen vinden, dan kunt u voor de resterende onderdelen van vraag (b) toch nog punten scoren door aan te geven hoe u de overige waarden had kunnen vinden als u wel over deze informatie had beschikt.

(c) **Vergeet vanaf heden** x_1. Voeg een nieuwe variabele x_0 toe aan het tableau. De kolom a_0 en kostencoëfficiënt c_0 zijn zodanig dat in het tableau onder x_0 de vector $(1, 1, 1, 1)$ komt te staan. Los het lineaire programmeringsprobleem optimaal op uitgaande van het bij (b) gegeven tableau zonder x_1 met x_0. **Geef steeds aan waarop de door gemaakte keuzen zijn gebaseerd**. Vermeld na afloop het gevonden optimum (punt en waarde). U mag voor z_0 de waarde 0 invullen, indien u de echte waarde niet hebt kunnen vinden (dit is waarschijnlijk niet de echte waarde). **Gebruik het voorbedrukte vel**.

(d) Vergeet de variabelen x_0 en x_1. U krijgt te horen dat de activiteit horend bij variabele x_2 niet langer gedoogd wordt en dat u er meteen mee moet stoppen. Bepaal hoeveel schade u door dit verbod loopt.

(e) Vergeet de variabelen x_0 en x_1 en het verbod van (d). Er blijkt nog een beperking te spelen die bij nader inzien wel van belang is: Voeg de beperking $-3x_2 + 2x_3 \geq 8$ toe. Los het nieuwe probleem optimaal op uitgaande van het bij (b) gegeven tableau. U mag weer x_1 buiten beschouwing laten en, indien nodig, voor z_0 de waarde 0 invullen.

(f) Stel dat we de derde beperking uit het oorspronkelijke probleem weg willen laten. Los dit nieuwe probleem op **uitgaande van het tableau gegeven bij (b)**. U mag weer x_1 buiten beschouwing laten en, indien nodig, voor z_0 de waarde 0 invullen.

(g) Stel dat er nog heel veel extra variabelen x_0 toegevoegd kunnen worden. Al deze variabelen hebben kostencoëfficiënt $c = -100$ en de bijbehorende kolommen $q = (q_1, q_2, q_3)$ moeten voldoen aan de volgende beperkingen: $2q_1 - q_2 + q_3 \leq 10$, $-q_1 + 4q_2 - q_3 = 5$, en $q_1 + q_2 + q_3 \geq 10$. Verder moet gelden $q_1, q_2, q_3 \geq 0$. Geef aan hoe u dit probleem aan kunt pakken met behulp van de techniek van de kolomgeneratie. **Het is niet de bedoeling dat u aan het rekenen slaat**.

Opgave 2

Beschouw het volgende lineaire programmeringsprobleem dat zal worden opgelost met de simplex methode voor begrensde variabelen:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcr}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} & z & = & 9x_1 & - & 4x_2 & - & 15x_3 & + & 14x_4 & & \\
& \text{o.v.} & & & -71x_1 & + & 29x_2 & + & 114x_3 & - & 101x_4 & \leq & -440 \\
& & & & 3x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & + & 4x_4 & \leq & 18 \\
& & & & -11x_1 & + & 4x_2 & + & 18x_3 & - & 15x_4 & \leq & -67 \\
& & & & 5x_1 & - & 2x_2 & - & 7x_3 & + & 9x_4 & \leq & 44 \\
& & & & & & 3 & \leq & x_1 & \leq & 9 & & \\
& & & & & & 2 & \leq & x_2 & \leq & 6 & & \\
& & & & & & 2 & \leq & x_3 & \leq & 6 & & \\
& & & & & & 1 & \leq & x_4 & \leq & 4 & &
\end{array}
$$

Voer spelingsvariabelen x_5, x_6, x_7 en x_8 in. Na een aantal iteraties is het volgende tableau gevonden:

		l	u		l	l		
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\widehat{\text{RHS}}$
0	0	1	-1	0	-8	-3	0	59
1	0	-2	1	0	4	1	0	5
0	0	1	-1	1	5	-6	0	4
0	1	-1	-1	0	11	3	0	3
0	0	1	1	0	2	1	1	3

(a) De waarde van de doelstellingsfunctie kan worden verlaagd door x_4 te verlagen. Voer de bijbehorende iteratie uit. Geef na afloop het punt dat correspondeert met het nieuwe tableau en de bijbehorende waarde. **U hoeft dus niet door te gaan tot een optimum is gevonden**.

(b) Stel dat de kostencoëfficiënt c_1 wordt verhoogd met $\lambda \geq 0$. Bepaal voor welke waarden van λ het gegeven tableau correspondeert met een optimale oplossing.

Opgave 3.

Beschouw het volgende problem, dat het TENTAMENROOSTERPROBLEEM zal worden genoemd. In een gegeven week moeten n tentamens, die we noteren met $T_1, \ldots, T_n$, worden ingeroosterd. Hiervoor wordt de week opgesplitst in 10 slots (iedere dag 9-12 en 14-17). Van ieder tentamen is bekend welke studenten hieraan deelnemen; deze verzameling noteren we als S_i voor tentamen i ($i = 1, \ldots, n$); noteer het aantal deelnemers aan tentamen T_i als a_i. Verder zijn er voor de hele week m zalen $Z_1, \ldots, Z_m$ beschikbaar; de capaciteit van zaal Z_j is gelijk aan c_j (deze is bekend).

- een student kan maximaal één tentamen per slot maken (maar 's ochtends en 's middags een tentamen op dezelfde dag is wel toegestaan);
- Een tentamen neemt het gehele tijdsslot in beslag;
- In een zaal kunnen verschillende tentamens in hetzelfde slot plaatsvinden, maar de totale capaciteit mag niet worden overschreden;
- Alle tentamens moeten worden ingeroosterd.

Als doel wordt gekozen het totale aantal vrije plaatsen in alle zalen gedurende de hele week te maximaliseren. Formuleer het bovenstaande probleem als een ILP-probleem. **Motiveer uw antwoord**.

Hint. Voer een verzameling Q_i in die alle tentamens bevat (behalve T_i) waarvoor geldt dat ze klanten gemeen hebben met T_i.

(b) Bij nader inzien was de doelstellingsfunctie toch niet zo slim gekozen. Leg uit waarom die niet meer informatie oplevert dan het antwoord op de vraag of er wel of niet een toegelaten oplossing bestaat.

(c) Helaas blijkt bij het oplossen van het probleem dat er geen toegelaten oplossing is voor dit probleem. Sommigen claimen dat er een extra slot nodig is, terwijl anderen claimen dat een zaaltje erbij afdoende is. Het huidige model is niet geschikt om hier iets over te zeggen, maar daar kan wat aan worden gedaan. Geef aan hoe u door de probleemformulering iets aan te passen aan nadere informatie kunt komen. **Motiveer uw antwoord**.

Opgave 4.
Ga uit van het volgende ILP-probleem

$$\min\ cx \text{ s.t. } Ax = b;\ x \geq 0;\ x \in \{0, 1\}$$

Volgens de theorie 'probeer eens wat' lossen we eerst de LP-relaxatie op; de LP-relaxatie van het bovenstaande probleem wordt verkregen door voor iedere variabele x_j de eis $x_j \in \{0, 1\}$ te vervangen door de eis $0 \leq x_j \leq 1$.
(a) Stel dat voor de optimale oplossing van de LP-relaxatie geldt dat iedere x_j een waarde gelijk aan 0 of 1 heeft. Bewijs dat deze oplossing ook optimaal is voor het ILP-probleem.

(b) Helaas, de gevonden optimale oplossing van de LP-relaxatie heeft ook een aantal fractionele x_j waarden. We besluiten daarom branch-and-bound toe te passen. Hierbij besluiten we te branchen op een fractionele variabele (dus we kiezen een x_j met fractionele waarde en splitsen het probleem op door te eisen $x_j = 0$ in de ene knoop en $x_j = 1$ in de andere). In iedere knoop lossen we dan de LP-relaxatie weer op. Verder mag u aannemen dat met behulp van locaal zoeken al een goede toegelaten oplossing is gevonden. Geef aan in welke situaties u een knoop nu mag 'afkappen' (hiermee wordt bedoeld dat de knoop buiten beschouwing kan worden gelaten, omdat verder onderzoek naar deze knoop niet interessant is). **Motiveer uw antwoord**.

(c) Stel dat de LP-relaxatie is opgelost met de simplex methode en dat het bijbehorende eindtableau bekend is. Stel dat x_k een niet-basisvariabele is; deze kan zowel op zijn onder- als op zijn bovengrens staan. Bewijs nu **één** van de volgende twee stellingen:

1. Stel $x_k = 0$ in de huidige optimale oplossing van de LP-relaxatie. Bewijs dat iedere toegelaten oplossing van de LP-relaxatie waarin x_k minstens Δ is (waarbij Δ een willekeurig positief getal is) een oplossingswaarde heeft die minstens $z_0 - \Delta(z_k - c_k)$ bedraagt, waarbij z_0 de waarde van de huidige oplossing (met $x_k = 0$) is en $(z_k - c_k)$ de waarde onder x_k op de nulde rij in het huidige eindtableau.

2. Stel $x_k = 1$ in de huidige optimale oplossing van de LP-relaxatie. Bewijs dat iedere toegelaten oplossing van de LP-relaxatie waarin x_k ten hoogste $1 - \Delta$ is (waarbij Δ een willekeurig positief getal is) een oplossingswaarde heeft die minstens $z_0 + \Delta(z_k - c_k)$ bedraagt, waarbij z_0 de waarde van de huidige oplossing (met $x_k = 0$) is en $(z_k - c_k)$ de waarde onder x_k op de nulde rij in het huidige eindtableau.

Hint. Kijk goed naar de doelstellingsfunctievergelijking.

(d) Geef aan hoe u de stellingen die bij (c) zijn geformuleerd kunt gebruiken om het bij (b) geformuleerde branch-and-bound algoritme te versnellen. **Motiveer uw antwoord voor één van beide gevallen**.

Antwoordvel

Het huidige tableau is voorgedrukt. Wanneer er een extra variabele x_7 bij staat bent u niet verplicht die in te voeren (het is zelfs niet altijd nodig om dat te doen). Hetzelfde geldt voor een extra regel onderaan het tableau. In de vrije ruimte onder het tweede tableau kunt u het hoe en waarom van de iteratie uitleggen en de uitkomst noteren.

Opgave 1c.

x_0	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
1	0	0	0	-1	-2	
1	0	0	1	-2	3	5
1	1	0	0	1	-1	3
1	0	1	0	1	-2	8

x_0	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS

Opgave 1d.

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
0	0	0	-1	-2		
0	0	1	-2	3		5
1	0	0	1	-1		3
0	1	0	1	-2		8

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS

Opgave 1e.

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
0	0	0	-1	-2		
0	0	1	-2	3		5
1	0	0	1	-1		3
0	1	0	1	-2		8

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS

Opgave 1f.

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
0	0	0	-1	-2		
0	0	1	-2	3		5
1	0	0	1	-1		3
0	1	0	1	-2		8

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS

Opgave 2a

		l	u		l	l		
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\widehat{\text{RHS}}$
0	0	1	−1	0	−8	−3	0	59
1	0	−2	1	0	4	1	0	5
0	0	1	−1	1	5	−6	0	4
0	1	−1	−1	0	11	3	0	3
0	0	1	1	0	2	1	1	3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\widehat{\text{RHS}}$