Uitwerking Tentamen Optimalisering 2005

1a) Na invoeren van spelingsvariabelen x_4, x_5 en x_6 heb je nog een basisvariabele nodig voor de tweede en derde vergelijking, want $b_2, b_3 < 0$. Voer kunstmatige variabelen x_7 en x_8 in. Het probleem wordt dan (met aangepaste doelst. fie):

$$\min z' = x_7 + x_8 \quad \text{o.d.v.} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + a_{13}x_3 + x_4 &= b_1 \\ -3x_1 - 2x_2 - a_{23}x_3 - x_5 + x_7 &= -b_2 \\ -x_1 - x_2 - a_{33}x_3 - x_6 + x_8 &= -b_3 \\ x_1, \ldots, x_8 &\geq 0 \end{aligned}$$

Breng dit tot uitdrukking in het tableau, waarna je x_7, x_8 uit de doelst. fievergelijking veegt:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	RHS
0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
-4	-3	$-a_{23}-a_{33}$	0	-1	-1	0	0	$-b_2-b_3$
2	1	a_{13}	1	0	0	0	0	b_1
-3	-2	$-a_{23}$	0	-1	0	1	0	$-b_2$
-1	-1	$-a_{33}$	0	0	-1	0	1	$-b_3$

De nieuwe nulde rij is tot stand gekomen door de tweede en derde rij bij de nulde rij op te tellen.

b) Onder de spelingsvariabelen stond de eenheidsmatrix ($a_4 = e_1, a_5 = e_2, a_6 = e_3$), dus nu staat er $B^{-1}e_1, B^{-1}e_2, B^{-1}e_3$ onder op de eerst-derde rij

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Op de nulde rij onder x_4 staat $z_4 - c_4 = z_4 = c_B B^{-1} a_4 = (c_B B^{-1}) a_4 = 0$.

Evenzo: $(c_B B^{-1})_2 = -1$, $(c_B B^{-1})_3 = -2 \Rightarrow$

$c_B B^{-1} = (0, -1, -2)$

$B = (a_{B_1}, a_{B_2}, a_{B_3})$. Uit de plaats van de eenheidsvectoren volgt $x_{B_1} = x_4$, $x_{B_2} = x_2$, $x_{B_3} = x_3$. Invullen geeft:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & a_{13}\\ 0 & 2 & a_{23}\\ 0 & 1 & a_{33}\end{pmatrix}.$$ Omdat $BB^{-1}=I$ kun je a_3 bepalen door BB^{-1} te bepalen:

$$BB^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a_{13}\\ 0 & 2 & a_{23}\\ 0 & 1 & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1+a_{13} & 2-2a_{13}\\ 0 & 2+a_{23} & -2-2a_{23}\\ 0 & 1+a_{33} & -1-2a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Dit geeft $a_{13}=1,\ a_{23}=-1,\ a_{33}=-1 \Rightarrow$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \text{ en } a_3=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}.$$

Uit $c_B B^{-1} B = c_B$ volgt:

$$(c_{B_1}\ c_{B_2}\ c_{B_3})=(c_4\ c_2\ c_3)=(0\ -1\ -2)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=(0\ -4\ 3)$$

$\Rightarrow c_2=-4\ ;\ c_3=3.$

$$\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=BB^{-1}b=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\ -2\\ -5\end{pmatrix}.$$

$$z_0=c_B B^{-1} b=(0\ -4\ 3)\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 8\end{pmatrix}=12$$

De huidige oplossing heeft $x_{B_1}=x_4=5,\ x_{B_2}=x_2=3,\ x_{B_3}=x_3=8$, dus $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(0,3,8,5,0,0)$ met waarde $z_0=12$.

Dit is de optimale oplossing indien $a\leqq 0$.

$$\begin{pmatrix}b\\ c\\ d\end{pmatrix}=B^{-1}a_1=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

$$a=z_1-c_1=c_B B^{-1} a_1-c_1=(0,-1,-2)\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 1\end{pmatrix}+3=-5+3=-2.$$

c)

	x_0	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	1	0	0	0	−1	−2	12
x_4	1	0	0	1	−2	3	5
x_2	1	1	0	0	1	−1	3
x_3	1	0	1	0	1	−2	8

Het loont om x_0 in de basis te brengen. Op grond van de ratio-regel gaat x_2 uit de basis (min $5/1, 3/1, 8/1$). Uitvoeren pivotoperatie:

	x_0	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	0	−1	0	0	−2	−1	9
x_4	0	−1	0	1	−3	4	2
x_0	1	1	0	0	1	−1	3
x_3	0	−1	1	0	0	−1	5

Omdat de nulde rij $\leqq 0$ is heb je een optimum gevonden met $x_{B_1} = x_4 = 2$, $x_{B_2} = x_0 = 3$, $x_{B_3} = x_3 = 5 \Rightarrow (x_0, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (3, 0, 5, 2, 0, 0)$ met waarde 9 (of −3 bij $z_0 = 0$).

d) x_2 moet dus 0 worden; x_2 moet uit de basis. Kandidaten om x_2 te vervangen zijn x_5 en x_6. Omdat x_5 RHS $\geqq 0$ houdt (keuze x_2 uit de basis via de ratio-regel) en de nulde rij $\leqq 0$ ben je in één keer klaar door x_5 in plaats van x_2 in de basis te brengen.

x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
1	0	0	0	−3	15
2	0	1	0	1	11
1	0	0	1	−1	3
−1	1	0	0	−1	5

Dit levert $(x_3, x_4, x_5, x_6) = (5, 11, 3, 0)$ met waarde 15 op.
Het verbieden van x_2 kost dus 2.

e) Voeg de beperking toe als $+3x_2 - 2x_3 + x_7 = -8$, waarbij x_7 een nieuwe spelingsvariabele is en breng vervolgens met twee rijoperaties (x_2 en x_3 wegwerken) in de juiste vorm:

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS	
	0	0	0	−1	−2	0	12	
x_4	0	0	1	−2	3	0	5	
x_2	1	0	0	1	−1	0	3	
x_3	0	1	0	1	−2	0	8	
x_7	0	0	0	−1	−1	1	−1	−3 maal tweede rij
	3	0	0	2	−4	1	8	+2 maal derde rij
	3	−2	0	0	0	1	−8	← oorspronkelijk

Aangezien $x_7 = -1$ is de huidige oplossing niet toegelaten. Gebruik duale simplex. Kandidaten op in de basis te gaan zijn x_5 en x_6 (coëfficiënt −1 op de vierde rij). Vanwege de ratioregel moet x_5 in de basis ($^{-1}/_{-1} < ^{-2}/_{-1}$) en x_7 gaat eruit.

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	0	0	0	0	−1	−1	13
x_4	0	0	1	0	5	−2	7
x_2	1	0	0	0	−2	1	2
x_3	0	1	0	0	−2	1	7
x_5	0	0	0	1	1	−1	1

Je hebt een optimum gevonden, want RHS ≥ 0. De bijbehorende oplossing is $(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (2, 7, 7, 1, 0, 0)$ met waarde 13.

f) Het weglaten van de derde beperking komt neer op het onbegrensd maken van x_6. Voeg x_7 toe die het tegenovergestelde van x_6 is (dus $x_6 = x_6 - x_7$ is dan een vrije variabele). Het tableau wordt:

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	0	0	0	-1	-2	2	12
x_4	0	0	1	-2	3	-3	5
x_2	1	0	0	1	-1	1	3
x_3	0	1	0	1	-2	2	8

Breng x_7 in de basis in plaats van x_2. Dit levert het tableau:

	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	-2	0	0	-2	0	0	6
x_4	3	0	1	1	0	0	14
x_7	1	0	0	1	-1	1	3
x_3	-2	1	0	-1	0	0	2

Het optimum is gevonden: $(x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 2, 14, 0)$ met waarde 6.

g) Het toevoegen van een kolom x_0 is zinvol indien $z_0 - c_0 > 0$, dus als $c_B B^{-1} q + 100 > 0$. In geval van kolomgeneratie moet je $c_B B^{-1} q + 100$ (en dus $c_B B^{-1} q = -q_2 - 2q_3$) maximaliseren en kijken of dit maximum > 0 is. Dit leidt tot het volgende LP:

$\max \; -q_2 - 2q_3$

o.d.v.

$2q_1 - q_2 + q_3 \leqq 10$

$-q_1 + 4q_2 - q_3 = 5$

$q_1 + q_2 + q_3 \geqq 10$

$q_1, q_2, q_3 \geqq 0$

18-4-'05

2a) Het loont om x_4 te verlagen met Δ. Bepaal de grenzen op Δ als:
$\Delta \leqq 3$, want anders komt x_4 onder zijn ondergrens.

$x_{B_1} = x_1 : 3 \leqq 5 + \Delta \leqq 9 \Rightarrow \Delta \leqq 4$ (botst tegen bovengrens)

$x_{B_2} = x_5 : 0 \leqq 4 - \Delta \leqq \infty \Rightarrow \Delta \leqq 4$ (botst tegen ondergrens)

$x_{B_3} = x_2 : 2 \leqq 3 - \Delta \leqq 6 \Rightarrow \Delta \leqq 1$ (botst tegen ondergrens)

$x_{B_4} = x_8 : 3 \leqq 3 + \Delta \leqq \infty$: geen grens.

Hieruit volgt $\Delta = 1$; x_2 gaat op zijn ondergrens. Nieuwe waarden voor $\widehat{RHS}$: $\hat{z} = 59 - \Delta = 58$, $x_1 = 6$, $x_5 = 3$, $x_8 = 4$, $x_4 = 3$.

	ℓ	ℓ				ℓ	ℓ		
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\widehat{RHS}$
	0	−1	2	0	0	−19	−6	0	58
x_1	1	1	−2	0	0	15	4	0	6
x_5	0	−1	2	0	1	−6	−9	0	3
x_4	0	−1	1	1	0	−11	−3	0	3
x_8	0	1	0	0	0	13	4	1	4

Het bij dit tableau horende punt is $(x_1, \ldots, x_8) = (6,2,2,3,3,0,0,4)$ met waarde 58.

b) Wanneer c_1 met λ wordt verhoogd, dan komt in de nulde rij van het huidige tableau onder x_1 : $-\lambda$ te staan. Maak het tableau in orde door er λ maal de eerste rij bij op te tellen. Dit geeft dan de nieuwe nulde rij:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
0	0	$1-2\lambda$	$-1+\lambda$	0	$-8+4\lambda$	$-3+\lambda$	0

De huidige oplossing is optimaal indien de waarde op de nulde rij $\leqq 0$ is voor x_3, x_6, x_7 en $\geqq 0$ voor x_4. Er moet dus gelden:

$(x_3)\ 1 - 2\lambda \leqq 0 \Rightarrow \lambda \geqq \frac{1}{2}$; $(x_4)\ -1 + \lambda \geqq 0 \Rightarrow \lambda \geqq 1$; $(x_6)\ -8 + 4\lambda \leqq 0 \Rightarrow \lambda \leqq 2$; $(x_7)\ -3 + \lambda \leqq 0 \Rightarrow \lambda \leqq 3$. Hieraan is voldaan voor $1 \leqq \lambda \leqq 2$, dus $\lambda \in [1, 2]$.

39a) Je moet bepalen wanneer tentamen T_i komt en waar. Voer daarom variabelen x_{ijt} in die aangeven of tentamen i in zaal j in slot t wordt gehouden (dan $x_{ijt}=1$) of niet (dan $x_{ijt}=0$).

Het aantal vrije plaatsen in slot t in zaal j is gelijk aan $c_j - \sum_{i=1}^{n} a_i x_{ijt}$. Definieer voor iedere tentamen T_i de verzameling Q_i als de subset tentamens die overlappen met T_i, $T_i \notin Q_i$.

Het probleem wordt dan:

$$\max \sum_{t=1}^{10} \sum_{j=1}^{m} \left(c_j - \sum_{i=1}^{n} a_i x_{ijt} \right) \qquad \text{o.d.v.}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ijt} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in Q_i} x_{ijt} \leq 1 \qquad \forall i,t \qquad \text{(geen dubbele tentamens per student)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_{ijt} \leq c_j \qquad \forall j,t \qquad \text{(ruimte in de zaal)}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{t=1}^{10} x_{ijt} = 1 \qquad \forall i \qquad \text{(alle tentamens plannen)}$$

$$x_{ijt} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j,t \qquad \text{(binaire variabelen)}$$

b) Voor iedere toegelaten oplossing geldt dat de waarde van de doelst. fie gelijk is aan tien maal de capaciteit van alle zalen minus het totale aantal deelnemers, en dit is constant $\left(10\sum_{j=1}^{m} c_j - \sum_{i=1}^{n} a_i\right)$.

Wanneer er geen toegelaten oplossing is, dan vind je $z = -\infty$.

c) Voeg aan de eerste twee beperkingen een kunstmatige variabele toe:
$\sum_{j=1}^{m} x_{ijt} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in Q_i} x_{ijt} \leq 1 + y_{it}$; $\sum_{i=1}^{n} a_i x_{ijt} \leq c_j + M_j$. Hierbij geeft y_{it} aan of een student wel eens twee dingen tegelijk moet doen en M_j geeft de benodigde extra ruimte aan. Vervang de doelst. fie door $\min\ w_1 \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{10} y_{it} + w_2 \sum_{j=1}^{m} \sum_{t=1}^{10} M_j$ waarbij w_1 en w_2 boetegewichten zijn.

18-4-'05

4a) Iedere toegelaten oplossing van het ILP is ook een toegelaten oplossing van de LP-relaxatie. Bij de LP-relaxatie is dus ook geoptimaliseerd over de toegelaten oplossingen van het ILP.

b) Er zijn drie mogelijkheden om een knoop af te kappen:
1) De knoop bevat geen toegelaten oplossingen (LP-relaxatie geeft $+\infty$).
2) Het optimum in de knoop is gevonden (LP-relaxatie heeft een geheeltallig optimum)
3) De ondergrens van de knoop is $\geqq$ aan een bekende oplossing. In dat geval weet je dat de beste oplossing in de knoop een waarde heeft $\geqq$ waarde ondergrens $\geqq$ waarde bekende oplossing; deze beste oplossing kan dus nooit tot een beter optimum leiden.

c) $z = z_0 - \sum_{j\in R_1} (z_j - c_j)x_j - \sum_{j \in R_2} (z_j - c_j)x_j$ is de doelst. fu. vergelijking

Aangezien $(z_j - c_j) \leqq 0 \ \forall j \in R_1$ en $(z_j - c_j) \geqq 0 \ \forall j \in R_2$ geldt, weet je, wanneer je x_k met Δ verhoogt voor $k \in R_1$, dat de waarde van de doelst. fu met minstens $-\Delta(z_k - c_k)$ toeneemt, want

$$z = z_0 - \sum_{j\in R_1} (z_j - c_j)x_j - \sum_{j\in R_2} (z_j - c_j)x_j \geqq z_0 - \sum_{j\in R_1\setminus k} (z_j - c_j)l_j - \sum_{j\in R_2} (z_j - c_j)u_j$$
$$-(z_k - c_k)(l_k + \Delta) = \hat{z} - (z_k - c_k)\Delta.$$

Hierbij volgt de $\geqq$ uit $x_j \geqq l_j$ en $-(z_j - c_j) \geqq 0 \Rightarrow -(z_j - c_j)x_j \geqq -(z_j - c_j)l_j$ voor alle $j \in R_1$ en $x_j \leqq u_j$ en $(z_j - c_j) \geqq 0 \Rightarrow -(z_j - c_j)x_j \geqq -(z_j - c_j)u_j$ voor alle $j \in R_2$.

Evenzo in geval (c2).

d) Stel $x_j = 0$. Uit (c1) volgt dat $\hat{z} + (c_j - z_j)$ een ondergrens is voor iedere oplossing in die knoop met $x_j = 1$ ($\hat{z}$ is huidige ondergrens). Wanneer deze $\geqq$ beste oplossing tot nu toe, dan weet je dat een oplossing in die knoop met $x_j = 1$ nooit tot een betere oplossing kan leiden $\Rightarrow$ fixeer $x_j = 0$.
Evenzo voor $x_j = 1$ en (c2).