# Uitwerking tentamen 3-2-'12

**1a)** min $z = c_1 x_1 - x_2 + 2x_3$

o.d.v.

$$2x_1 + a_{12}x_2 + x_3 + x_4 = 7$$
$$-x_1 + a_{22}x_2 - x_3 + x_5 = -6$$
$$-x_1 + a_{32}x_2 - x_3 + x_6 = -3$$
$$x_1, \ldots, x_6 \geq 0$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 2 \\ -1 & a_{22} & -1 \\ -1 & a_{32} & -1 \end{pmatrix}$$

Bepaal $a_2$ door $BB^{-1} = I$; neem de tweede kolom van $B^{-1}$ $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 2 \\ -1 & a_{22} & -1 \\ -1 & a_{32} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - a_{12} \\ 1 - a_{22} \\ 1 - a_{32} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{12} = -1 \\ a_{22} = 0 \\ a_{32} = 1 \end{array}$$

Bereken $c_1$ door $c_B$ te berekenen:

$$c_B = (c_3 \; c_2 \; c_1) = c_B B^{-1} B = (-2 \; -1 \; -3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (2 \; -1 \; 0)$$

$\Rightarrow c_1 = 0$

Optimale oplossing: $(x_1, \ldots, x_6) = (4, 3, 2, 0, 0, 0)$ met waarde 1.

**b)** Voer $x_0$ als spelingsvariabele in $\Rightarrow x_0 + x_1 = 3$. Voeg deze vergelijking toe aan het tableau en breng het in de juiste vorm. Dit levert $x_0 = -1$ op; pas duale simplex toe. De kandidaten om in de basis te gaan zijn $x_4$ en $x_6$. Op grond van de ratioregel $\min \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{4j}} \;\middle|\; y_{4j} < 0 \right\}$ zie je dat je moet pivoteren op $x_4$.

Dit levert als oplossing $(x_0, x_1, \ldots, x_6) = (0, 3, 3, 3, 0, 0, 0)$ op met waarde 3. Deze is optimaal (nulde rij $\leq 0$).

Wanneer je $x_1 = 3$ moet toevoegen, dan begin je als bij $x_0 + x_1 = 3$, maar zodra $x_0$ uit de basis is streep je deze variabele weg.

Uitwerking tentamen 3-2-'12

c) Het weglaten van de eerste beperking komt neer op het vrijmaken van de spelingsvariabele $x_4$. Voeg daarom $x_0 = -x_4$ toe; de kolom onder $x_0$ is het tegenovergestelde van die van $x_4$. Het levert op om $x_0$ in de basis te brengen; $x_3$ gaat uit de basis.

In het nieuwe tableau heb je op de eerste rij $x_0 - x_4$ staan; deze variabelen komen verder nergens voor. Laat deze rij en de variabelen $x_0$ en $x_4$ weg. De bijbehorende oplossing is $(x_1, x_2, x_3, x_5, x_6) = (6, 3, 0, 0, 0)$ met waarde $-3$. Deze oplossing is niet optimaal, want het levert op om $x_5$ te verhogen. Er is echter geen kandidaat om uit de basis te gaan, want $y_5 \leq 0$. Dit levert een onbegrensd minimum met als richtingsvector $d = (d_1, d_2, d_3, d_5, d_6) = (1, 1, 0, 1, 0)$.

d) De variabele $x_3$ is basisvariabele in de eerste rij; deze correspondeert met de vergelijking $x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 2$. Aangezien $x_4, x_5, x_6 \geqq 0$ betekent dit dat $x_3 \geqq 2$ voor iedere oplossing in het toegelaten gebied. Dus $x_3 = 0$ stellen levert een leeg toegelaten gebied op.

e) Er geldt $\pi^* = c_B B^{-1} = (-2, -1, -3)$. Dus de schaduwprijs die hoort bij de eerste beperking is $-2$. Wanneer $\pi^*$ de optimale oplossing van het duale probleem blijft, dan geldt $W(\varepsilon) = \pi^*(b - \varepsilon \cdot e_1) = \pi^* b - \varepsilon \pi_1$, waarbij $\pi^* b$ de oude uitkomstwaarde is.
Er geldt dat $\pi^*$ de optimale oplossing van (D) is zolang $B$ hoort bij de optimale TBO. Aangezien de nulde rij $\leqq 0$ is bij deze $B$, moet je de toegelatenheid checken. Er moet dus gelden $B^{-1} b' \geqq 0$, dus $B^{-1}(b - \varepsilon e_1) = B^{-1} b - \varepsilon B^{-1} e_1 \geqq 0$. Invullen geeft

$$B^{-1} b - \varepsilon B^{-1} e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\varepsilon \\ 3 \\ 4-\varepsilon \end{pmatrix} \geqq 0.$$

Dus voor $\varepsilon \leqq 4$.

Uitwerking tentamen 3-2-'12

1] Voeg $x_0$ toe met waarde 0; dit is gemakkelijk omdat de basisvariabele niet van waarde veranderen en de oplossing dus toegelaten blijft. Het is geen TBO, dus daar gaan we voor zorgen. Onder $x_0$ komt $z_0 - c_0$ op de nulde rij en $y_0$ daaronder. Als $z_0 - c_0 > 0$, dan levert het op om $x_0$ te verhogen; als $z_0 - c_0 < 0$, dan levert het op om $x_0$ te verlagen (en als $z_0 - c_0 = 0$, dan heb je een optimum te pakken). Voer nu een standaard iteratie uit met de simplex methode voor begrensde variabelen, doe net alsof $x_0$ nu op zijn grens staat met $x_0 = 0$. Daarna heb je een TBO te pakken voor de simplex methode met begrensde variabelen.

6

2a] Je moet beslissen hoeveel grondstof fabriek $F_f$ produceert; voer hier een variabele voor in $f_f$. Verder moet je beslissen hoeveel grondstof je van fabriek $F_f$ naar productiebedrijf $P_p$ stuurt; voer hiervoor een variabele $x_{fp}$ in $(f, p = 1, \dots, 3)$. Daarna moet je beslissen hoeveel snuisterijen van soort $i$ $(i = 1,2)$ productiebedrijf $P_p$ produceert; voer hiervoor een variabele $p_{ip}$ $(i = 1,2 \,;\, p = 1,2,3)$ in. Daarna moet je nog beslissen hoeveel snuisterijen van soort $i$ $(i=1,2)$ worden geleverd door productiebedrijf $P_p$ aan winkel $w$; voer hiervoor de variabele $y_{wip}$ $(w = 1, \dots, n \,;\, i = 1,2 \,;\, p = 1,2,3)$ in. Vergeet $f_f$.

5]

$$\min \sum_{f=1}^{3} \sum_{p=1}^{3} x_{fp} c_{fp} + \sum_{i=1}^{2} \sum_{w=1}^{n} \sum_{p=1}^{3} y_{wip} d_{wp} \qquad \text{(totale transport-kosten)}$$

o.d.v.

$$\sum_{p=1}^{n} x_{fp} \leq Q_f \qquad \forall f = 1,2,3 \qquad \text{(capaciteit fabriek } f\text{)}$$

$$p_{1p} + p_{2p} \leq D_p \qquad \forall p = 1,2,3 \qquad \text{(capaciteit productiebedrijf } p\text{)}$$

$$s_1 p_{1p} + s_2 p_{2p} \leq x_{1p} + x_{2p} + x_{3p} \qquad \forall p = 1,2,3 \qquad \text{(voldoende grondstof)}$$

$$\sum_{w=1}^{n} y_{wip} \leq p_{ip} \qquad \forall i = 1,2 \;\; \forall p = 1,2,3 \qquad \text{(voldoende produceren)}$$

$$y_{wi1} + y_{wi2} + y_{wi3} \geq b_{wi} \qquad \forall w = 1, \dots, n \,;\, \forall i = 1,2 \qquad \text{(voldoende leveren)}$$

$$y_{wip} \geq 0 \;\; \forall w,i,p \,;\; p_{ip} \geq 0 \;\; \forall i,p \,;\; x_{fp} \geq 0 \;\; \forall f,p$$

andere blad

Uitwerking opgave 2 Tentamen 2012

Variabelen

$x_{fp}$ = hoeveelheid grondstof die door fabriek f aan productiebedrijf p wordt geleverd

$y_{wip}$ = aantal snuisterijen van soort i die door productiebedrijf p worden geleverd aan winkel w.

Neem aan dat fabriek f precies genoeg produceert om alles te kunnen leveren dat door de productiebedrijven wordt gevraagd.

Neem aan dat productiebedrijf p precies genoeg produceert om alles te kunnen leveren dat door de winkels wordt gevraagd.

LP-formulering:

$$\min \sum_{f=1}^{3} \sum_{p=1}^{3} c_{fp} x_{fp} + \sum_{p=1}^{3} \sum_{w=1}^{n} \sum_{i=1}^{2} d_{pw} y_{wip}$$

o.d.v.

$$\sum_{p=1}^{3} x_{fp} \leq Q_f \qquad \forall f \qquad \text{capaciteit fabriek } f$$

$$\sum_{w=1}^{n} \sum_{i=1}^{2} y_{wip} \leq D_p \qquad \forall p \qquad \text{capaciteit productiebedrijf } p$$

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{w=1}^{n} s_i y_{wip} \leq \sum_{f=1}^{3} x_{fp} \qquad \forall p \qquad \text{genoeg grondstoffen beschikbaar}$$

$$\sum_{p=1}^{3} y_{wip} \geq b_{wi} \qquad \forall w,i \qquad \text{genoeg levering per winkel en per soort snuisterij}$$

$$x_{fp},\ y_{wip} \geq 0$$

Uitwerking tentamen 3-2-'12

**3|** Je verlaagt $x_4$ met $\Delta$. Bereken de grenzen op $\Delta$.

$\Delta \leq u_4 - l_4 = 3$

Nieuwe waarde $x_1$ wordt $x_1 \leftarrow 5 + \Delta \leq 9 \Rightarrow \Delta \leq 4$

Nieuwe waarde $x_2$ wordt $x_2 \leftarrow 3 - \Delta \geq 2 \Rightarrow \Delta \leq 1$

Nieuwe waarde $x_5$ wordt $x_5 \leftarrow 4 - \Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 4$

Nieuwe waarde $x_8$ wordt $x_8 \leftarrow 3 + \Delta \leq \infty \Rightarrow \Delta \leq \infty$

De waarden van $x_3, x_6, x_7$ veranderen niet.

Hieruit volgt $\Delta = 1$ en $x_2$ gaat uit de basis en wordt op zijn ondergrens gezet. Het nieuwe tableau wordt:

6

| | | $l$ | $l$ | | | $l$ | $l$ | | $\wedge$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | RHS |
| | 0 | -1 | 2 | 0 | 0 | -19 | -6 | 0 | 58 |
| $x_1$ | 1 | 1 | -3 | 0 | 0 | 15 | 4 | 0 | 6 |
| $x_5$ | 0 | -1 | 2 | 0 | 1 | -6 | -9 | 0 | 3 |
| $x_4$ | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | -11 | -3 | 0 | 3 |
| $x_8$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 13 | 4 | 1 | 4 |

De waarden onder $\widehat{RHS}$ worden apart aangepast; $z \leftarrow 59 - \Delta = 58$.

Het bijbehorende punt is $(x_1, \dots, x_8) = (6, 2, 2, 3, 3, 0, 0, 4)$ met waarde 58

**1a|** $\min z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

o.d.v.

5

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 7$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 29$$
$$x_1 - x_2 - 2x_3 \geq 12$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \text{ vrij}$$

Gebruik $cx \geq wAx \geq wb$ om het duale af te leiden:

$x_1 + 2x_2 + 3x_2 \geq w_1(x_1 + x_2 + x_3) + w_2(2x_1 + 3x_2 - x_3) + w_3(x_1 - x_2 - 2x_3) =$

$x_1(w_1 + 2w_2 + w_3) + x_2(w_1 + 3w_2 - w_3) + x_3(w_1 - w_2 - 2w_3) \geq 7w_1 + 29w_2 + 12w_3$

Zorg ervoor dat de $\geq$ tekens gaan gelden.

Uitwerking tentamen 3-2-'12

$x_1 \geqq 0$ en $x_1 \gtreqless x_1(w_1+2w_2+w_3) \Rightarrow w_1+2w_2+w_3 \leqq 1$

$x_2 \leqq 0$ en $2x_2 \gtreqless x_2(w_1+3w_2-w_3) \Rightarrow w_1+3w_2-w_3 \geqq 2$

$x_3$ vrij en $3x_3 \gtreqless x_3(w_1-w_2-2w_3) \Rightarrow w_1-w_2-2w_3 = 3$

$x_1+x_2+x_3 \leqq 7$ en $w_1(x_1+x_2+x_3) \gtreqless 7w_1 \Rightarrow w_1 \leqq 0$

$2x_1+3x_2-x_3 = 29$ en $w_2(2x_1+3x_2-x_3) \gtreqless 29w_2 \Rightarrow w_2$ vrij

$x_1-x_2-2x_3 \geqq 12$ en $w_3(x_1-x_2-2x_3) \gtreqless 12w_3 \Rightarrow w_3 \geqq 0$.

(D) max $7w_1+29w_2+12w_3$

o.d.v.

$$w_1+2w_2+w_3 \leqq 1$$
$$w_1+3w_2-w_3 \geqq 2$$
$$w_1-w_2-2w_3 = 3$$
$$w_1 \leqq 0,\ w_2 \text{ vrij},\ w_3 \geqq 0$$

b) Uit de zwakke dualiteitsstelling volgt $cx^* \geqq w^*b$ ($* \Rightarrow$ optimaal).

Verder geldt $cx^* \leqq c\hat{x}$ (opt. oplossing minstens zo goed als $\hat{x}$)

$\hat{w}b \leqq w^*b$ ( " " " " " " $\hat{w}$)

5 Dus geldt $cx^* \leqq c\hat{x} = \hat{w}b \leqq w^*b$. In combinatie met $cx^* \geqq w^*b$ moet dus gelden $cx^* = w^*b$ en dus moeten alle '$\leqq$' tekens hierboven '=' tekens zijn. Dit impliceert $cx^* = c\hat{x}$ en $\hat{w}b = w^*b$ dus $\hat{x}$ en $\hat{w}$ zijn ook optimaal.