Universiteit Utrecht
Departement Informatica

Examen Optimalisering op dinsdag 31 januari, 17.00-20.00 uur.

- **Smart phones UIT** en diep weggestopt in je tas. Wanneer je naar de WC wil, dan moet je je smart phone inleveren (krijg je weer terug).
- Het gebruik van een **rekenmachine** is niet nodig en dus ook **niet toegestaan.**
- Het is toegestaan om er een 'spiekbrief' bij te houden: één enkelvoudig beschreven A4'tje zonder uitklapvellen enz.
- Het examen omvat acht opgaven, verdeeld over zes bladzijden (inclusief deze).
- **Je moet je uitwerkingen invullen op de antwoordbladen.** Je kunt alleen je antwoordblad inleveren. Wanneer je ruimte tekort komt, dan kun je een extra blaadje vragen. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Wanneer je breuken met een noemer groter dan 4 tegenkomt, dan is er vermoedelijk iets misgegaan. Inverteren van een matrix kost tijd, is foutgevoelig, en is bovendien overbodig bij deze toets.
- **Vul a.u.b. de evaluatie-enquête in.**

Op de verschillende onderdelen kan maximaal worden gescoord (in totaal 53 punten):
Opgave 4: 10 punten.
Opgaven 1, 3, 5, 6, 7b, 8a: 4 punten.
Opgaven 2a, 2c, 7c, 8b, 8c: 3 punten.
Opgaven 2b, 7a: 2 punten.

Succes!

==

Opgave 1.
Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcl}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} & z & = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & & \\
& \text{o.v.} & & & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & \leq & 5 \\
& & & & -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\
& & & & 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & \geq & 4 \\
& & & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Voer zoveel spelingsvariabelen in als nodig. Geef het starttableau van de eerste fase dat gebruikt kan worden om een TBO te vinden. Je mag hierbij zoveel kunstmatige variabelen gebruiken als je zelf nodig acht; je moet wel aangeven welke variabelen de spelingvariabelen zijn en welke de kunstmatige variabelen. Nadat je het starttableau van de eerste fase hebt bepaald **hoef je niet te itereren.**

Opgave 2.
Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcl}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} & z & = & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & \\
& \text{o.v.} & & & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \geq & 5 \\
& & & & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & \leq & 0 \\
& & & & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & -4 \\
& & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
& & & & & & & & x_2 & \leq & 0 \\
& & & & & & & & x_3 & & \text{vrij}
\end{array}
$$

(a) Bepaal het duale probleem (D) van dit gegeven primale probleem (P).

(b) De zwakke dualiteitsstelling zegt dat, als (P) een minimaliseringsprobleem is en (D) het bijbehorende duale probleem, dan geldt dat de uitkomstwaarde van (P) minstens zo groot is als de uitkomstwaarde van (D). Bewijs dat deze stelling geldt voor het primale probleem van (a) en het door u bij gevonden duale probleem.

(c) Een gevolg van de zwakke dualiteitsstelling is dat als (P) een onbegrensd minimum heeft, dan is het toegelaten gebied van (D) leeg (u hoeft dit niet te bewijzen). Stel dat je een gegeven primaal probleem (P) hebt met een eindig minimum; het is bekend dat het bijbehorende duale probleem (D) dan ook een eindige optimale oplossing heeft. Stel nu dat de rechterkantvector b in (P) wordt gewijzigd in b'. Toon aan dat het resulterende primale probleem nu geen onbegrensd minimum kan krijgen.

Opgave 3
Gegeven is het onderstaande tableau (de relaties van het minimaliseringsprobleem waarmee het correspondeert zijn niet van belang; alle x_j zijn ≥ 0 met oorspronkelijk $\leq$ beperkingen).

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
0	0	−1	1	0	−2	−1	−8
0	1	2	1	0	−1	−2	3
0	0	1	1	1	1	−3	4
1	0	0	−1	0	1	−1	2

Voer maximaal één iteratie uit op het antwoordblad! Geef na afloop antwoord op de vragen op het antwoordblad.

Opgave 4
Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem:

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} \quad z = & c_1x_1 & - & 2x_2 & & \\
& \text{o.v.} & a_{11}x_1 & + & x_2 & \leq & b_1 \\
& & a_{21}x_1 & - & x_2 & \leq & b_2 \\
& & a_{31}x_1 & + & 2x_2 & \geq & b_3 \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Voeg spelingsvariabelen x_3, x_4, x_5 toe; **let op de tekens**. Na een aantal iteraties is het volgende tableau gevonden.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
0	0	a	-2	d	W
1	0	0	2	e	6
0	0	1	-1	f	3
0	1	0	3	-2	10

Beantwoord de vragen op het antwoordformulier. Wanneer er gevraagd wordt om een **verklaring**, dan betekent dit dat van u wordt verwacht om **kort** aan te geven waarom u tot die oplossing bent gekomen; bij **afleiding** moet u aangeven hoe u de door u gevonden oplossing kunt afleiden uit het tableau; bij **berekening** moet u aangeven welke **formule** u hebt gebruikt (plus uitwerking voor zover mogelijk). **Indien u de waarde van een onbekende niet hebt kunnen vinden, en deze nodig hebt om een andere onbekende uit te rekenen, dan mag u verder rekenen met het gegeven alternatief:** u mag voor een onbekende waarde 1 invullen bij het verder rekenen (zeer waarschijnlijk zijn dit niet de echte waarden). **Geef aan dat u het alternatief gebruikt.**

Opgave 5

Gegeven is het onderstaande tableau (de relaties van het minimaliseringsprobleem waarmee het correspondeert zijn niet van belang; alle x_j zijn ≥ 0 met oorspronkelijk $\leq$ beperkingen).

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
-4	0	0	-2	-3	0	-1	-4
-2	1	0	3	2	0	1	2
-4	0	0	-2	-1	1	-1	3
2	0	1	5	3	0	2	5

Voeg de nieuwe beperking $3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$ toe aan het oorspronkelijke probleem en los het op. Merk op dat de huidige TBO niet aan deze extra beperking voldoet.

Opgave 6.

Gegeven is het onderstaande tableau (de relaties van het minimaliseringsprobleem waarmee het correspondeert zijn niet van belang; alle x_j zijn ≥ 0 met oorspronkelijk $\leq$ beperkingen; x_5, x_6, x_7 zijn de spelingsvariabelen).

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
-3	0	0	-2	-1	0	-1	0
-2	1	0	3	2	0	1	7
2	0	0	1	3	1	-1	8
-1	0	1	-1	-1	0	1	1

Vanwege één of andere actie wordt besloten om een nieuw product te gaan testen door er **precies één exemplaar** van te produceren. Het produceren van dat dit ene exemplaar kost 1 eenheid van grondstof 1, 2 eenheden van grondstof 2, en 4 eenheden van grondstof 3 (van grondstof i waren oorspronkelijk b_i grondstoffen beschikbaar). Ga na wat de gevolgen van dit besluit zijn. Voer maximaal één iteratie uit en beantwoord daarna de vragen op het antwoordblad.

Opgave 7
Beschouw het volgende lineaire programmeringsprobleem dat zal worden opgelost met de simplex methode voor begrensde variabelen:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcl}
\text{(P)} & \text{Minimaliseer} & z = & 9x_1 & + & c_2x_2 & - & 15x_3 & + & 14x_4 & & \\
& \text{o.v.} & & -71x_1 & + & 29x_2 & + & 114x_3 & - & 101x_4 & \leq & b_1 \\
& & & 3x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & + & 4x_4 & \leq & 18 \\
& & & -11x_1 & + & 4x_2 & + & 18x_3 & - & 15x_4 & \leq & b_3 \\
& & & 5x_1 & - & 2x_2 & - & 7x_3 & + & 9x_4 & \leq & b_4 \\
& & & & & 3 & \leq & x_1 & \leq & 9 & & \\
& & & & & -2 & \leq & x_2 & \leq & 6 & & \\
& & & & & l_3 & \leq & x_3 & \leq & 6 & & \\
& & & & & 1 & \leq & x_4 & \leq & 4 & &
\end{array}
$$

Voer spelingsvariabelen x_5, x_6, x_7 en x_8 in. Na een aantal iteraties is het volgende tableau gevonden:

		l	u		l	l		
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\widehat{\text{RHS}}$
0	0	1	−1	0	−8	−3	0	59
1	0	−2	1	0	4	1	0	5
0	0	1	−1	1	5	−6	0	4
0	1	−1	−1	0	11	3	0	3
0	0	1	1	0	2	1	1	3

(a) Bepaal de correcte waarden van l_3 en c_2. Indien u een waarde nodig heeft, maar die niet kunt vinden, gebruik dan 1 (vermoedelijk niet correct); geef dit aan bij de berekening. U hoeft b_1, b_3, b_4 niet te berekenen (mag wel, maar dit levert niets extra op).

(b) De waarde van de doelstellingsfunctie kan worden verlaagd door x_4 te verlagen. Voer de bijbehorende iteratie uit. Geef na afloop het punt dat correspondeert met het nieuwe tableau en de bijbehorende waarde. **U hoeft dus niet door te gaan tot een optimum is gevonden.**

(c) Stel dat de kostencoëfficiënt c_1 wordt verhoogd met $\lambda \geq 0$. Bepaal voor welke waarden van λ **het gegeven tableau** correspondeert met een optimale oplossing.

Opgave 8.
Het BIN PACKING probleem is als volgt gedefinieerd. Gegeven is een verzameling van n items die in maximaal m bins moeten worden gestopt, waarbij je zo min mogelijk bins wil gebruiken; een bin wordt als 'gebruikt' beschouwd indien er minstens één item in zit. Iedere bin heeft omvang B; item j heeft omvang a_j ($j = 1, \ldots, n$), waarbij $0 < a_j \leq B$.

(a) Formuleer het bovenstaande probleem als een ILP-probleem met een **polynomiaal** aantal variabelen (de bij (b) genoemde formulering mag u dus niet gebruiken).

Een andere mogelijkheid om het probleem te formuleren is met behulp van een ILP-formulering gebaseerd op **binplannen**; een binplan s bestaat uit een deelverzameling van de items met totale omvang ten hoogste B. Binplan s wordt gekarakteriseerd door de volgende **parameters**:

$$q_{js} = \begin{cases} 1 & \text{als item } j \text{ in binplan } s \text{ zit} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Definieer S als de verzameling die alle binplannen bevat; we gaan ervanuit dat alle binplannen bekend zijn.

(b) Geef aan hoe het BIN PACKING als een ILP kan worden geformuleerd met behulp van de binplannen.

Uiteraard zijn niet alle binplannen bekend, en het zijn er te veel om ze te enumereren. Daarom wordt geprobeerd om de **LP-relaxatie** van de formulering van (b) op te lossen met behulp van de techniek van Kolomgeneratie.

(c) Formuleer het **pricing probleem** dat moet worden opgelost om de LP-relaxatie op te lossen met de techniek van Kolomgeneratie. Ga er van uit dat de vector $\mathbf{c_B B^{-1}}$ bekend is; definieer $\mathbf{c_B B^{-1}} \equiv \mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$.