

Optimalisering en complexiteit (INFOOPT)

30 mei 2007

N.B. Helaas ontbreekt opgave 4.

Voor alle opgaven samen kan maximaal 60 punten worden gescoord, opgave 4 telt voor 10 punten.

Opgave 1

(15 punten)

Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{(P) Minimaliseer } z & = & -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \\
 \text{o.v.} & & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 16 \\
 & & -x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 2 \\
 & & -x_2 + x_3 = 5 \\
 & & x_1, x_2, x_3 \geq 2
 \end{array}$$

- Voer spelingsvariabelen x_4 en x_5 in. Geef het starttableau voor de eerste fase; u mag hierbij zoveel kunstmatige variabelen gebruiken als u wenselijk vindt. (3 punten)
- Bepaal het duale probleem van het bovenstaande probleem (P) (dus zonder de aanpassingen van a) en zonder spelingsvariabelen). (3 punten)
- Voeg spelingsvariabelen in in het primale probleem (P) en het duale probleem (D). Formuleer de complementaire spelingsrelaties. (2 punten)
- Bewijs de volgende stelling: *Wanneer x^* en w^* toegelaten oplossingen zijn van (P) en (D) die aan de complementaire spelingsrelaties voldoen, dan zijn x^* en w^* optimale oplossingen van (P) en (D).* U mag hierbij gebruik maken van de sterke en zwakke dualiteitsstelling en de gevolgen hiervan, zolang u maar netjes aangeeft wat u aanneemt. (4 punten)
- Gegeven is dat $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0, 3, 8)$ een toegelaten oplossing van (P) is. Ga na met behulp van de complementaire spelingsrelaties of x^* een optimale oplossing van (P) is. Verklaar uw antwoord. (3 punten)

Opgave 2

(20 punten)

Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{(P) Minimaliseer } z & = & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + x_4 \\
 \text{o.v.} & & -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leq b_1 \\
 & & 2x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 \leq b_2 \\
 & & -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 \leq b_3 \\
 & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{array}$$

Voeg spelingsvariabelen x_5, x_6, x_7 toe. De verschillende onderdelen van opgave 2 kunnen onafhankelijk van elkaar worden gemaakt. Wanneer u de correcte waarde van een variabele niet hebt kunnen bepalen, ga dan uit van het gegeven alternatief.

- Het volgende tableau is het laatste tableau van de tweede fase.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
0	0	-3	a	0	-2	-1	W
1	0	-2	b	0	2	1	6
0	0	1	c	1	-1	-1	3
0	1	0	d	0	3	2	10

Bepaal met behulp van het tableau B^{-1} , $c_B B^{-1}$ en de optimale oplossing (punt en waarde); **motiveer uw antwoord**. Bepaal B en $c_1, c_2, c_3, b_1, b_2, b_3, a, b, c, d, W$. Ga daarbij uit van de instantie die aan het begin van deze opgave is gegeven met daaraan toegevoegd de spelingsvariabelen. (8 punten)

Vanaf nu gaan we er bij de komende tableauvragen van uit dat x_4 uit het probleem en uit het tableau is geschrapt.

- b) Voeg de variabele x_0 toe aan dit tableau; onder x_0 komt in het tableau te staan $(1, 1, -1, 1)^T$. Voer **één** iteratie uit om dit nieuwe probleem op te lossen; verklaar duidelijk de door u gemaakte keuzes bij het bepalen van de pivot. Geef na afloop het bijbehorende punt (met waarde) en geef aan of het optimaal is of niet. Als u de waarde W niet hebt kunnen berekenen, gebruik dan $W = 0$. (3 punten)
- c) Ga weer uit van het oorspronkelijke tableau. Stel dat de tweede beperking weggelaten wordt. Los dit probleem op. Ga na of na **één** iteratie een optimale oplossing is gevonden. Indien dit het geval is, geef dan de oplossing (punt en waarde). Indien het probleem nog niet optimaal opgelost is, geef dan het tableau waarmee de tweede iteratie uitgevoerd zou kunnen worden. (4 punten)
- d) Ga weer uit van het oorspronkelijke tableau. Stel dat u te horen hebt gehregen dat er in tegenstelling tot wat gebruikelijk is er een ondergrens Δ op x_5 is, ongelijk aan 0. Ga na wat de hoogste waarde van Δ is waarvoor geldt dat er het toegelaten gebied een toegelaten oplossing bevat. (5 punten)

Opgave 3

(15 punten)

Een groot productiebedrijf beschikt over m distributiecentra waaruit de klanten worden beleverd. Voor ieder centrum i ($i = 1, \dots, m$) is bekend hoeveel het kost om het open te houden (noteer de hosten als k_i voor centrum i), hoeveel de capaciteit M_i van centrum i bedraagt, en wat de transportkosten q_i per eenheid zijn van het productiebedrijf naar centrum i . Voor iedere klant j ($j = 1, \dots, n$) is bekend hoeveel hij wenst af te nemen (noteer de vraag als v_j voor klant j) en hoeveel het vervoer kost per eenheid product vanaf centrum i (noteer de vervoerskosten van centrum i naar klant j als c_{ij} per eenheid). Een klant moet door precies één centrum worden beleverd.

- a) Uiteraard is het productiebedrijf op zoek naar het optimale leveringsschema in de huidige situatie, waarin alle distributiecentra open zijn en waarbij iedere klant volledig beleverd moet worden. Formuleer dit probleem als een ILP-probleem met een **polynomiaal** aantal variabelen (de bij c) genoemde formulering mag u dus niet gebruiken). (3 punten)
- b) Het productiebedrijf wil het distributienetwerk reorganiseren. Hierbij wordt de mogelijkheid niet uitgesloten om een aantal centra te sluiten. Formuleer dit probleem weer als een ILP-probleem. (3 punten)
- c) Een andere mogelijkheid om het probleem van b) op te lossen is met behulp van een ILP-formulering gebaseerd op **klantenkringen** ; een klantenkring van centrum i is een verzameling klanten die allen door centrum i worden beleverd, waarbij aan de capaciteitsbeperking is voldaan. Definieer S_i als de verzameling van alle toegelaten klantenkringen voor centrum i ; definieer S als de verzameling van alle toegelaten klantenkringen.

Klantenkring s wordt gekarakteriseerd door de kostencoefficiënt c_s en vector $(a_{s_1}, \dots, a_{s_n})$, waarbij $a_{s_j} = 1$ als klant j tot de klantenkring behoort (en 0 anders). Stel dat alle klantenkringen voor alle centra bekend zijn. Geef aan hoe het probleem van b) met behulp van de klantenkringen kan worden geformuleerd. (3 punten)

- d) Uiteraard zijn niet alle klantenkringen bekend. Ga na hoe u de LP-relaxatie (waarbij de geheel-tallige variabelen een continu domein krijgen) kunt oplossen met behulp van **kolomgeneratie** . Geef hierbij aan hoe de methode werkt en stel het pricing probleem op voor een gegeven centrum i . U hoeft niet aan te geven hoe u het pricing probleem oplost (mag wel). (6 punten)