Antwoordmodel Tentamen Analyse 30 juni 2014

1) a) Een functie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ is uniform continu als
$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x,y\in[a,b] : |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$
Kies $\delta = \varepsilon/L$ (onafhankelijk van $x,y\in[a,b]$)
Dan volgt uit het feit dat f Lipschitz is dat
$\forall x,y\in[a,b] : |f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$ en dus als
$|x-y|<\delta$ volgt

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| < L\delta = \varepsilon$$

b) Aangezien g continu differentieerbaar is en $[a,b]$ gesloten en begrensd, kunnen we de min-max stelling toepassen op $g':[a,b]\to\mathbb{R}$. Laat $L = \max\limits_{a\leq x\leq b} |g'(x)|$.

Laat $x,y\in[a,b]$ en pas de eerste middelwaardestelling toe. Er volgt dat er een $c\in[a,b]$ tussen x en y bestaat met
$g(x)-g(y) = g'(c)(x-y)$. Hieruit volgt dat
$|g(x)-g(y)| = |g'(c)||x-y| \leq L|x-y|$ en aangezien L onafhankelijk van x en y is en x,y willekeurig zijn volgt dat g Lipschitz-continu is

c) Merk op dat uit het feit dat h Riemann-integreerbaar is, volgt dat h begrensd is. Zeg $\sup\limits_{a\leq x\leq b} |h(x)| = L$. Uit basis eigenschappen van de integratietheorie (zie Hfd 7) volgt

$$|H(x)-H(y)| = \left|\int_y^x h(t)\,dt\right| \leq \int_y^x |h(t)|\,dt$$
$$\leq \int_y^x M\,dt = M(x-y),\quad x\geq y$$

en

$$|H(x)-H(y)| \leq \int_x^y |h(t)|\,dt \leq M(y-x) \text{ voor } x\leq y$$

Dus $|H(x)-H(y)| \leq M|x-y|$. Aangezien M onafhankelijk van $x,y\in[a,b]$ is en $x,y\in[a,b]$ willekeurig volgt dat H Lipschitz continu is.

d) Nee, kies $h: [a,b] \to \mathbb{R}$ met $h(t) = 0$ voor $a \leq t \leq \frac{1}{2}(a+b)$ en $h(t) = 1$ voor $\frac{1}{2}(a+b) \leq t \leq b$ en bereken de linker- en rechterafgeleide van H.

2). a). Als g de nulfunctie is, zijn we klaar. Aangezien $g(t) \geq 0$ en $g \neq 0$ volgt nu $\int_a^b g(t)dt > 0$. Pas nu de min-max stelling op f toe (f continu en $[a,b]$ gesloten en begrensd) en laat $m = \min_{a \leq t \leq b} f(t)$ en $M = \max_{a \leq t \leq b} f(t)$. Dan volgt

$m \leq f(t) \leq M$ en dus ($g(t) \geq 0$) $m g(t) \leq f(t) g(t) \leq M g(t)$ en dus uit basiseigenschappen van de integratietheorie (Hfd. 7) dat

$$m \int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq M \int_a^b g(t)dt$$

Dus $$m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} \leq M$$ en

$$\frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt} \in f([a,b]).$$

Uit de tussenwaardestelling toegepast op f volgt nu dat er een $c \in [a,b]$ bestaat met

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)dt}$$

b) Kies $g = 1$ in a). Of direct via de Hoofdstelling van de integraalrekening en de middelwaardestelling: Aangezien $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continu volgt uit de Hoofdstelling van de integraalrekening dat de functie $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ met $F(t) = \int_a^t f(s)ds$ continu differentieerbaar is met $F' = f$. Uit de middelwaarde stelling volgt nu dat er een $c \in [a,b]$ bestaat zodat

$$f(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t)dt$$

3). Merk op dat $\mathbb{R}$ volledig is en dat dus iedere Cauchy rij in $\mathbb{R}$ convergeert. Het is dus voldoende te laten zien dat de rij $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ een Cauchy rij in $\mathbb{R}$ is.
Uit het gegeven dat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy rijen in V zijn, volgt

$$\exists N_1\ \forall n,m>N_1 : d(x_n,x_m) < \varepsilon/2$$
$$\exists N_2\ \forall n,m>N_2 : d(y_n,y_m) < \varepsilon/2$$

Laat $N=\max(N_1,N_2)$, dan geldt met de Δ-ongelijkheid voor $n,m>N$

$$d(x_n,y_n) \leq d(x_n,x_m)+d(x_m,y_m)+d(y_m,y_n)$$
$$< d(x_m,y_m)+\varepsilon$$

en analoog

$$d(x_m,y_n) < d(x_n,y_n)+\varepsilon$$

Dus $\forall n,m>N$

$$|d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)| < \varepsilon.$$

Hieruit volgt dat $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ een Cauchy rij is.

4 a) Laat $A=\{|f(x)| \mid x\in\mathbb{R}\}$, dan volgt $A\subset\mathbb{R}$ en $A\neq\emptyset$ immers $|f(0)|\in A$. Aangezien f begrensd is bestaat er een M zodat $A\subset[0,M]$. Dus A is een begrensde, niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$ en heeft dus een supremum (zie Stelling 3.37)

b) Merk op $\|f\|\geq 0$ en als $\|f\|=0$ dan $|f(x)|=0$ voor alle $x\in\mathbb{R}$ en dus $f(x)=0$ voor alle $x\in\mathbb{R}$ en f is de nulfunctie.
Er geldt $\|\lambda f\| := \sup\{|\lambda f(x)| \mid x\in\mathbb{R}\}$
$= \sup\{|\lambda|\cdot|f(x)| \mid x\in\mathbb{R}\}$.
Laat $A=\{|f(x)| \mid x\in\mathbb{R}\}$, dan $\operatorname{bov}(A)=[\|f\|,\infty)$. Aangezien $|\lambda|\geq 0$ volgt $\operatorname{bov}(|\lambda|A) = |\lambda|\operatorname{bov}(A)$ en dus $\operatorname{bov}(\{|\lambda||f(x)| \mid x\in\mathbb{R}\}) = [|\lambda|\,\|f\|,\infty)$. Hieruit volgt $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$ voor $f\in V$ en $\lambda\in\mathbb{R}$

Rest aan te tonen $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Merk op dat uit de eigenschappen van de Euclidische metriek op $\mathbb{R}$ volgt dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$

Dus $\|f\| + \|g\|$ is een bovengrens voor de verzameling $\{|f(x)+g(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$ en dus $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

c) Merk op dat B begrensd is, immers $\|f\| \leq 1$ voor alle $f \in B$.
Laat p een limietpunt van B, dan geldt $\forall \delta > 0\ \exists g \in B\ \|p-g\| < \delta$
Hieruit volgt met de Δ-ongelijkheid (zie b))

$$\|p\| \leq \|p-g\| + \|g\| < 1 + \delta \quad (*)$$

Aangezien we voor iedere $\delta > 0$ een g kunnen vinden zodat $(*)$ geldt volgt $\|p\| \leq 1$ en dus $p \in B$. Hieruit volgt dat B gesloten is.

d) Stel dat er een convergente deelrij $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ is met limiet $\bar{f}$.
Merk eerst op dat $\bar{f} \neq 0$ (niet de nulfunctie) immers voor ieder element van de (deel)rij geldt dat er een $x_n \in \mathbb{R}$ bestaat met $f_n(x_n) = 1$ en dus $\|f_n\| \geq 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
Dus er is een $a \in \mathbb{R}$ met $\bar{f}(a) = b$ en $b \neq 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ met $N > |a|/2$, dan geldt voor $j > N$, $n_j > N$ en dus $a \in (-2n_j, 2n_j)$ voor $j > N$ en dus $f_{n_j}(a) = 0$. Hieruit volgt $|\bar{f}(a) - f_{n_j}(a)| = b > 0$ en dus $\|\bar{f} - f_{n_j}\| \geq b$ voor $j > N$.
Tegenspraak.

e) De rij in d) is begrensd en heeft geen convergente deelrij. Hieruit volgt dat B niet rijcompact is.

5 a) In een stationair punt is de gradient gelijk aan nul.
Aangezien

$$(\text{grad } f)(x,y) = (2xy^2 + 2y^2,\ 2x^2y + 4xy + 4y^3)$$
$$= (2y^2(x+1),\ 2y(x^2+2x+2y^2))$$

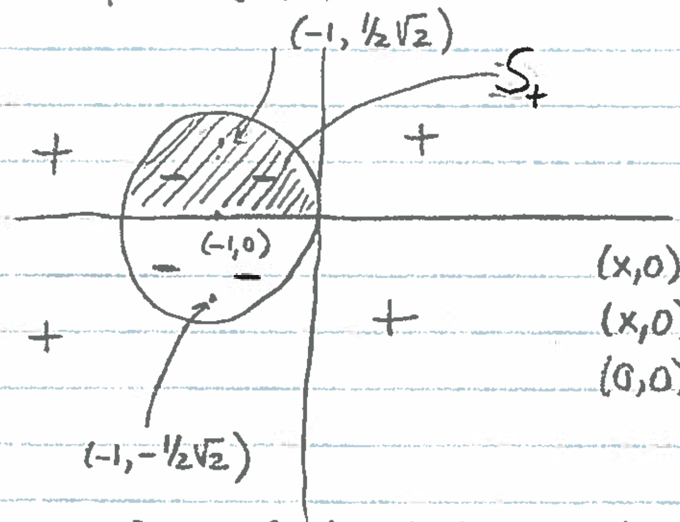
Dus $\text{grad } f = 0 \iff y = 0$ of $(x+1) = 0$ & $x^2+2x+2y^2 = 0$
$\iff y = 0$ of $x = -1$ & $y^2 = 1/2$

Dus de stationaire punten zijn
$(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$; $(-1, \tfrac{1}{2}\sqrt{2})$ en $(-1, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2})$

b) $f(x,y) = 0 \iff y = 0$ of $x^2+2x+y^2 = 0$
$\iff y = 0$ of $(x+1)^2 + y^2 = 1$

Dus de nulpunten zijn $(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$ en de cirkel met middelpunt $(-1,0)$ en straal 1.

c)



Uit tekenverloop volgt (ga na)
$(x,0)$ met $x > 0$ of $x < -2$: lokale minima
$(x,0)$ met $-2 < x < 0$: lokale maxima
$(0,0)$ en $(-2,0)$: zadelpunten

Beperk f tot S_+ (de halve cirkelschijf), dan geldt S_+ gesloten en begrensd, f nul op de rand van S_+ en kleiner ~~gelijk~~ nul op het inwendige van S_+. Dus de min-max stelling zegt dat f een minimum op het inwendige van S_+ aanneemt en de enige mogelijkheid hiervoor is het stationaire punt $(-1, \tfrac{1}{2}\sqrt{2})$ met $f(-1, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = -1/4$. Aangezien $f(x,y) \geq -1/4$ voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ volgt dat dit een globaal minimum is.
Idem voor $(-1, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2})$ via een zelfde argument met betrekking tot de andere halve cirkelschijf.

Tenslotte moeten we de rand van D onderzoeken. Merk op dat de globale maxima van f op de rand van D moeten liggen!

Rand $|y|=2$: $f(x,\pm 2) = 4x^2+8x+16 = 4(x+1)^2+12$

Dus op deze randen heeft f een minimum in $x=-1$ met waarde 12. Dit is echter geen minimum voor f op D immers $f(x,2-\delta)<12$ voor $\delta>0$ en klein.

Voor $x=2$: $f(2,y) = 8y^2+y^4 \geq 0$, heeft minimum voor voor $y=0$ en $(2,0)$ is ook lokaal minimum voor f (hadden we al eerder gevonden).

Voor $x=-2$: $f(-2,y) = y^4 \geq 0$ heeft minimum in $y=0$, maar $(-2,0)$ is geen lokaal minimum voor f, maar een zadelpunt (hadden we al eerder gevonden).

Tenslotte moeten we de hoekpunten $(\pm 2, \pm 2)$ onderzoeken en de globale maxima van f zijn in $(2,\pm 2)$.