Hertentamen Analyse

19 augustus 2014, 13:30-16:30

- Schrijf op ieder vel je naam en bovendien op het eerste vel je studentnummer, de naam van je werkgroepleider (Ralph Klaasse, Sebastian Klein, KaYin Leung of Roy Wang) en het aantal ingeleverde vellen.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, ga dan toch door met de volgende onderdelen. Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

Succes!

1. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met $f(0,0) = 0$ en met $f(x,y)$ voor $(x,y) \neq (0,0)$ gegeven door

$$f(x,y) := \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}.$$

(a). Is f continu in $(0,0)$?

(b). Bestaan de partiële afgeleiden $D_1 f$ en $D_2 f$ in $(0,0)$?

(c). Is f differentieerbaar in $(0,0)$?

2. Laat $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ en $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ een continue functie. Voor $c \in \mathbb{R}^m$ is de verzameling $f^{-1}(c)$ gedefinieerd door

$$f^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}.$$

(a). Geef een ϵ-δ bewijs dat iedere eindige doorsnee van gesloten delen van $\mathbb{R}^n$ weer een gesloten deel van $\mathbb{R}^n$ is.

(b). Bewijs dat voor $m \geq 1$, de verzameling $f^{-1}(c)$ een gesloten deel van $\mathbb{R}^n$ is. (Hint: bewijs eerst het geval $m = 1$ en gebruik vervolgens onderdeel (a).)

(c). Laat zien dat de verzameling $D \in \mathbb{R}^3$ gegeven door

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ en } x + y + z = 1\}$$

gesloten is.

3. Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een begrensde rij in $\mathbb{R}$. Laat $s := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en neem aan dat $a_n < s$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(a). Bewijs dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een monotoon strikt stijgende deelrij heeft.

(b). Toon aan dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente deelrij heeft.

4. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en zij $I = [a, b]$. Laat $f : I \to \mathbb{R}$ een monotoon strikt stijgende functie. Neem aan dat er $c, d \in \mathbb{R}$ met $c < d$ bestaan zodat $f([a, b]) = [c, d]$.

(a). Bewijs dat de functie f continu is.

(b). Bewijs dat de inverse functie f^{-1} van f bestaat en continu is.

5. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de functie gedefinieerd door

$$f(x, y) := (x - y)(x^2 + y^2 - 1)$$

en laat $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$.

(a). Bereken de stationaire punten van f in $\mathbb{R}^2$.

(b). Laat zien dat de beperking van f tot de rand van D gerepresenteerd kan worden door de functie $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ met $g(t) = \sqrt{2}(\cos t - \sin t)$. Bepaal de extrema van g.

(c). Bepaal de extrema van f op D en geef aan of de gevonden extrema lokaal dan wel globaal zijn. Bewijs je beweringen.

	1(a):5	2(a):10	3(a):10	4(a):10	5(a):5
Normering:	1(b):5	2(b):5	3(b):10	4(b):10	5(b):5
	1(c):10	2(c):5			5(c):10