Tussentoets Analyse

donderdag 12 juni 2014, 09:00-11:00

– Schrijf op ieder vel je naam en bovendien op het eerste vel je studentnummer, de naam van je werkgroepleider (Ralph Klaasse, Sebastian Klein, KaYin Leung of Roy Wang) en het aantal ingeleverde vellen.

– Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.

– Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.

– Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, ga dan toch door met de volgende onderdelen. Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.

– Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

– Bij meer dan twee onvoldoendes voor de inleveropgaven telt het resultaat van de tussentoets niet mee.

Succes!

1. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de functie gedefinieerd door

$$f(x) = x + \frac{1}{x^8 + 2x^6 + 4x^4 + 6x^2 + 8}.$$

(a). Toon aan dat er voor iedere $c \in \mathbb{R}$ een $a \in \mathbb{R}$ bestaat met $f(a) < c$.

(b). Bewijs dat $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de functie gedefinieerd door

$$f(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2)$$

en laat $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ de cirkelschijf met straal 1.

(a). Bereken alle stationaire punten van f in $\mathbb{R}$.

(b). Laat zien dat de beperking van f tot rand van D gerepresenteerd kan worden door de functie $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ met $g(y) = y^2(1 - y^2)$. Bepaal de extrema van g.

(c). Bepaal de extrema van f op D.

Z.O.Z.

3. Zij (V, d) een metrische ruimte met metriek d en laat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rijen in V zijn. Neem aan dat er x en y in V bestaan zodat

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{en} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Bewijs dat

$$x = y \quad \text{dan en slechts dan als} \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

4. Zij $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$, met $\mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^2$, de functie gegeven door

$$f(x, y) = \frac{x^2 y e^{x^2 y}}{x^2 - y^2}.$$

(a). Bepaal $\mathrm{Dom}(f)$, het maximale domein van f.

(b). Bereken

$$\lim_{x\to 0} f(x, 2x) \qquad \text{en} \qquad \lim_{x\to 0} f(x, x^2).$$

(c). Bewijs dat voor $\lambda \in \mathbb{R}$ met $\lambda > 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x, x + \lambda x^2) = -\frac{1}{2\lambda}.$$

(d). Bewijs dat de limiet van f in $(0, 0)$ niet bestaat.

Normering:

1(a):10	2(a):10	3:20	4(a):5
1(b):10	2(b):10		4(b):5
	2(c):10		4(c):10
			4(d):10