# Tussentoets Analyse

**dinsdag 2 juni 2015, 13:15-15:00**

- Schrijf op ieder vel je naam en bovendien op het eerste vel je studentnummer, de naam van je werkgroepleider (Davide Alboresi, Ralph Klaasse, KaYin Leung of Boris Osorno Torres) en het aantal ingeleverde vellen.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, ga dan toch door met de volgende onderdelen. Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Bij meer dan drie onvoldoendes voor de inleveropgaven telt het resultaat van de tussentoets niet mee.

Succes!

**1.** Van een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met domein $\mathrm{Dom}(f) = [0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ is gegeven dat $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ voor $x \in (0,1)$ en tenslotte

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

(a). Toon aan dat er voor iedere $c > 0$ er een $a \in [0,1)$ bestaat met $f(a) > c$.

(b). Toon aan dat $f([0,1)) = [0,\infty)$.

**2.** We beschouwen een tweetal deelverzamelingen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ en veronderstellen dat ieder punt van $B$ een limietpunt van $A$ is.

(a). Toon aan dat $\overline{B} \subset \overline{A}$.

(b). Veronderstel dat verder gegeven is dat $A \subset B$. Toon aan dat $\overline{B} = \overline{A}$.

Z.O.Z.

3. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functies met domein $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ en $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

   (a). Zij $f$ continu in 0 en zij $g$ gedefinieerd door $g(x) = xf(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $g$ differentieerbaar is in 0 en bepaal $g'(0)$.

   (b). Zij $f$ begrensd en zij $g$ gedefinieerd door $g(x) = x^2 f(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $g$ differentieerbaar is in 0 en bepaal $g'(0)$.

   (c). Laat zien dat de functie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $h(x) = x^2 \sin(1/x)$ voor $x \neq 0$ en door $h(0) = 0$, differentieerbaar is in 0. Bepaal $h'(0)$. Bewijs dat de afgeleide functie $h'$ niet continu is in 0.

   (d). Zij $f$ differentieerbaar in 0 en $f(0) = 0$. Bewijs dat er een functie $g$ bestaat die continu is in 0 met $f(x) = xg(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$.

4. Beschouw de verzameling van begrensde functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Met de puntsgewijze optelling en scalarvermenigvuldiging is $V$ een reële lineaire ruimte.

   (a). Toon aan dat voor iedere $f \in V$ het getal

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$$

   bestaat.

   (b). Toon aan dat $\|\cdot\|$ een norm op $V$ is.

   Laat

$$B := \{f \in V \mid \|f\| \leq 1\}.$$

   (c). Laat zien dat $B$ een gesloten en begrensde verzameling van $V$ is.

   (d). Definieer de rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $B$ door $f_n(x) = 1$ voor $x \in [2n, 2n+1]$, $f_n(x) = 1$ voor $x \in [-(2n+1), -2n]$ en $f_n(x) = 0$ voor $x \notin [2n, 2n+1] \cup [-(2n+1), -2n]$ voor $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat de rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geen convergente deelrij in $B$ heeft en concludeer dat $B$ niet rij-compact is.

Normering:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1(a):8 | 2(a):8 | 3(a):8 | 4(a):8 |
| 1(b):8 | 2(b):8 | 3(b):8 | 4(b):8 |
| | | 3(c):8 | 4(c):8 |
| | | 3(d):8 | 4(d):8 |