

## Tentamen Analyse

27 juni 2016, 13:30-16:30

- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, ga dan toch door met de volgende onderdelen. Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschaft informatie gebruiken.
- Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

Succes!

1. Zij  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven functies.

- Zij  $f$  continu in 0 en zij  $g$  gedefinieerd door  $g(x) = xf(x)$  voor  $x \in \mathbb{R}$ . Bewijs dat  $g$  differentieerbaar is in 0 en bepaal  $g'(0)$ .
- Zij  $f$  begrensd en zij  $g$  gedefinieerd door  $g(x) = x^2f(x)$  voor  $x \in \mathbb{R}$ . Bewijs dat  $g$  differentieerbaar is in 0 en bepaal  $g'(0)$ .
- Laat zien dat de functie  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gedefinieerd door  $h(x) = x^2 \sin(1/x)$  voor  $x \neq 0$  en door  $h(0) = 0$ , differentieerbaar is in 0. Bepaal  $h'(0)$ . Bewijs dat de afgeleide functie  $h'$  niet continu is in 0.
- Zij  $f$  differentieerbaar in 0 en  $f(0) = 0$ . Bewijs dat er een functie  $g$  bestaat die continu is in 0 met  $f(x) = xg(x)$  voor  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Van een continue functie  $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  is gegeven dat  $f(0) = 0$ ,  $f(x) > 0$  voor  $x \in (0, 1)$  en tenslotte dat

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

- Toon aan dat er voor iedere  $c > 0$  er een  $a \in [0, 1)$  bestaat met  $f(a) > c$ .
- Toon aan dat  $f([0, 1)) = [0, \infty)$ .

Z.O.Z.

3. Voor elke  $n \geq 1$  definiëren we

$$a_n := \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

- Q (a). Bewijs dat de rij  $(a_{2n+1})_{n \geq 0}$  monotoon dalend is.  
 Q (b). Bewijs dat de rij  $(a_{2n})_{n \geq 0}$  monotoon stijgend is.  
 (c). Bewijs dat de in (a) en (b) genoemde rijen convergent zijn.  
 (d). Bewijs dat  $a_{2n+1} - a_{2n} \rightarrow 0$  voor  $n \rightarrow \infty$ .  
 (e). Bewijs dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  bestaat.

4. Zij  $C([0, 1])$  de reële lineaire ruimte van continue functies  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . We definiëren de functie  $d : C([0, 1]) \times C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  door

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

- (a). Bewijs dat  $d$  een goedgedefinieerde functie is en dat  $d$  een metriek op  $C([0, 1])$  geeft.  
 (b). Laat  $f(x) = \sin 2\pi x$ ,  $g(x) = \cos 2\pi x$  en bereken  $d(f, g)$ , de afstand tussen  $f$  en  $g$ .  
 Hint: maak een schets.  
 (c). Bewijs dat de rij  $(f_n)_{n \geq 1}$  in  $C([0, 1])$  gedefinieerd door

$$f_n(x) := \begin{cases} \sqrt[n+1]} & \text{als } 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1}, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{als } \frac{1}{n+1} < x \leq 1, \end{cases}$$

*Dit was een foutje volgens Sjoerd Verdruyn Lunel*

een Cauchy rij in  $C([0, 1])$  voorzien van de  $d$ -metriek is.

- (d). Bewijs dat de rij  $(f_n)_{n \geq 1}$  niet convergeert, d.w.z. dat er geen functie  $g \in C([0, 1])$  bestaat zodat  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, g) = 0$ , en concludeer dat  $C([0, 1])$  voorzien van de  $d$ -metriek niet volledig is.

5. (Bonusopgave.) Bepaal

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2 - 1} + \frac{3}{n^2 - 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 - n + 1} \right).$$

Normering:	1(a):5	2(a):10	3(a):5	4(a):10	5:10
	1(b):5	2(b):10	3(b):5	4(b):5	
	1(c):8		3(c):5	4(c):10	
	1(d):7		3(d):5	4(d):5	
			3(e):5		