Tentamen Analyse

27 juni 2016, 13:30-16:30

- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, ga dan toch door met de volgende onderdelen. Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

Succes!

1. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven functies.

(a). Zij f continu in 0 en zij g gedefinieerd door $g(x) = xf(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat g differentieerbaar is in 0 en bepaal $g'(0)$.

(b). Zij f begrensd en zij g gedefinieerd door $g(x) = x^2 f(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat g differentieerbaar is in 0 en bepaal $g'(0)$.

(c). Laat zien dat de functie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $h(x) = x^2 \sin(1/x)$ voor $x \neq 0$ en door $h(0) = 0$, differentieerbaar is in 0. Bepaal $h'(0)$. Bewijs dat de afgeleide functie h' niet continu is in 0.

(d). Zij f differentieerbaar in 0 en $f(0) = 0$. Bewijs dat er een functie g bestaat die continu is in 0 met $f(x) = xg(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$.

2. Van een continue functie $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ is gegeven dat $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ voor $x \in (0, 1)$ en tenslotte dat

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

(a). Toon aan dat er voor iedere $c > 0$ er een $a \in [0, 1)$ bestaat met $f(a) > c$.

(b). Toon aan dat $f([0, 1)) = [0, \infty)$.

$f(1) = \infty$

Z.O.Z.

kies $c > 0$; $a \in [0,1) \to f(a)$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x \in Dom(f)$; $|x-1| < \delta \to \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \varepsilon$

$-\delta < x-1 < \delta$

Stel $c = 1000$, neem x zodat $\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{1000}$ dan $f(x) > 1000$

~~$3 > 2 \quad \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$~~

3. Voor elke $n \geq 1$ definiëren we

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Q (a). Bewijs dat de rij $(a_{2n+1})_{n\geq 0}$ monotoon dalend is.

Q (b). Bewijs dat de rij $(a_{2n})_{n\geq 0}$ monotoon stijgend is.

(c). Bewijs dat de in (a) en (b) genoemde rijen convergent zijn.

(d). Bewijs dat $a_{2n+1} - a_{2n} \to 0$ voor $n \to \infty$.

(e). Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat.

4. Zij $C([0,1])$ de reële lineaire ruimte van continue functies $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. We definiëren de functie $d : C([0,1]) \times C([0,1]) \to \mathbb{R}$ door

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

(a). Bewijs dat d een goedgedefinieerde functie is en dat d een metriek op $C([0,1])$ geeft.

(b). Laat $f(x) = \sin 2\pi x$, $g(x) = \cos 2\pi x$ en bereken $d(f,g)$, de afstand tussen f en g. Hint: maak een schets.

(c). Bewijs dat de rij $(f_n)_{n\geq 1}$ in $C([0,1])$ gedefinieerd door

$$f_n(x) := \begin{cases} \cancel{\sqrt{n}}\ \sqrt{n+1} & \text{als } 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1}, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{als } \frac{1}{n+1} < x \leq 1, \end{cases}$$

→ Dit was een foutje volgens Sjoerd Verduyn Lunel

een Cauchy rij in $C([0,1])$ voorzien van de d-metriek is.

(d). Bewijs dat de rij $(f_n)_{n\geq 1}$ niet convergeert, d.w.z. dat er geen functie $g \in C([0,1])$ bestaat zodat $\lim_{n\to\infty} d(f_n, g) = 0$, en concludeer dat $C([0,1])$ voorzien van de d-metriek niet volledig is.

5. (Bonusopgave.) Bepaal

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2-1} + \frac{3}{n^2-2} + \cdots + \frac{n}{n^2-n+1} \right).$$

	1(a):5	2(a):10	3(a):5	4(a):10	5:10
	1(b):5	2(b):10	3(b):5	4(b):5	
Normering:	1(c):8		3(c):5	4(c):10	
	1(d):7		3(d):5	4(d):5	
			3(e):5		