Tentamen Analyse

26 juni 2017, 13:30-16:30

– Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.

– Het aanhalen van een stelling als bewijs van een onderdeel van een opgave is niet voldoende.

– Als je in een bewijs stellingen gebruikt, laat dan ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.

– Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

Succes!

1. Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval en zij $f : I \to \mathbb{R}$ een continue functie. Laat $V = I \times I \subset \mathbb{R}^2$ en definieer de functie $F : V \to \mathbb{R}$ door $F(x,y) = f(x) - f(y)$. Zij tenslotte V^+ de verzameling gegeven door $V^+ = \{(x,y) \in V \mid y > x\}$.

(a). Bewijs dat de functie F continu is.

(b). Bewijs dat de functie f injectief is dan en slechts dan als F geen nulpunten heeft op V^+.

(c). Bewijs dat de functie f strikt monotoon (stijgend of dalend) is dan en slechts dan als F een vast teken heeft op V^+.

(d). Bewijs dat V^+ convex, d.w.z. dat ieder tweetal punten $a, b \in V^+$ verbonden kunnen worden door een rechte lijn $c(t) = (1-t)a + tb$ die geheel in V^+ ligt.

(e). Gebruik de bovenstaande onderdelen om te bewijzen dat als de functie f injectief is dat dan f strikt monotoon (stijgend of dalend) is.

2. Laat $\mathbb{R}^2$ voorzien zijn van de Euclidische norm. Gegeven is een afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ met de eigenschap dat

$$2\|f(x,y) - f(v,w)\|^2 = (x-v)^2 + (y-w)^2 \qquad \text{voor alle } (x,y),\ (v,w) \in \mathbb{R}^2.$$

Definieer de rij $((a_n, b_n))_{n \geq 0}$ inductief door

$$(a_0, b_0) = (0,0) \quad \text{en} \quad (a_{n+1}, b_{n+1}) = f(a_n, b_n).$$

(a). Bewijs dat de functie f continu is.

(b). Bewijs dat de rij $((a_n, b_n))_{n \geq 0}$ een Cauchy rij is.

(c). Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n, b_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n).$$

3. Beschouw de verzameling van begrensde functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Met de puntsgewijze optelling en scalarvermenigvuldiging is V een reële lineaire ruimte.

(a). Bewijs dat voor iedere $f \in V$ het getal

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$$

bestaat.

(b). Bewijs dat $\| \cdot \|$ een norm op V is.

Laat

$$B := \{f \in V \mid \|f\| \leq 1\}.$$

(c). Bewijs dat B een gesloten en begrensde verzameling van V is.

(d). Definieer de rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B door $f_n(x) = 1$ voor $x \in [2n, 2n+1]$, $f_n(x) = 1$ voor $x \in [-(2n+1), -2n]$ en $f_n(x) = 0$ voor $x \notin [2n, 2n+1] \cup [-(2n+1), -2n]$ voor $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat de rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geen convergente deelrij in B heeft en concludeer dat B niet rij-compact is.

4. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en zij $(c_n)_{n\geq 0}$ een convergente rij in $[a, b]$. Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie zodat $f(c_n) = 1$ voor $n \geq 0$ en $f(x) = 0$ voor alle overige x in $[a, b]$. Laat $\underline{S}(f, V)$ de ondersom en $\overline{S}(f, V)$ de bovensom van f zijn bij een verdeling V van $[a, b]$.

(a). Bewijs dat er voor iedere $\epsilon > 0$ een verdeling V bestaat met $\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) < \epsilon$.

(b). Toon aan dat f Riemann-integreerbaar is.

5. (Bonusopgave.) Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie. Voor $c \in \mathbb{R}$ is de verzameling $f^{-1}(c)$ gedefinieerd door

$$f^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = c\}.$$

Bewijs dat $f^{-1}(c)$ een gesloten deel van $\mathbb{R}$ is.

	1(a):5	2(a):5	3(a):5	4(a):15	5:10
	1(b):5	2(b):15	3(b):5	4(b):5	
Normering:	1(c):5	2(c):10	3(c):5		
	1(d):5		3(d):10		
	1(e):5				