Naam: Antwoordblad Tentamen Analyse 26-06-2017

Opleiding / studierichting: Studentnr.: 4 pagina's

Tentamen: Datum: Uitslag:

I

1 a) Definitie F continu ①

Limieten: $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x) = f(a_1)$, $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(y) = f(a_2)$ ②

Somregel: $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x)-f(y) = \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x) - \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(y)$ ②

b) $\Rightarrow$ Stel f injectief, als $(x,y)\in V^+$ dan $x<y$ en dus $f(x)\neq f(y)$ en dus F heeft geen nulpunt op V^+ ②

$\Leftarrow$ Stel $F\neq 0$ op V^+, als $x\neq y$ dan (x,y) of (y,x) in V^+ en aangezien $F\neq 0$ op V^+ volgt dan $f(x)\neq f(y)$ en f injectief ③

c) $\Rightarrow$ Stel f strikt monotoon (zva stijgend). Als $(x,y)\in V^+$, dan $x<y$ en dus $f(x)<f(y)$ en $F(x,y)=f(x)-f(y)<0$ en F heeft vast teken op V^+ ③

$\Leftarrow$ Stel F heeft vast teken (zva $F(x,y)<0$), laat $(x,y)\in V^+$ dan $x<y$ en $f(x)-f(y)<0$, dus f strikt monotoon stijgend. ②

d) laat $a=(a_1,a_2)$, $b=(b_1,b_2)$ in V^+, $c(t)=(1-t)a+tb$ ①

$t\geq 0$: $b_1<b_2 \Rightarrow tb_1<tb_2$; $1-t>0$: $a_1<a_2 \Rightarrow (1-t)a_1<(1-t)a_2$ ②

$0\leq t\leq 1$: $(1-t)a_1+tb_1 < (1-t)a_2+tb_2$, dus $c(t)=(1-t)a+tb\in V^+$ ②

e) Stel $F(a)<0$ en $F(b)>0$ voor zekere $a,b\in V^+$, $c(t)=(1-t)a+tb$ ①

$F(c(t))$ samenstelling continue fct ① ; tussenwaardestelling ① ;

conclusie F vast teken ① ; conclusie f strikt monotoon ①

II

2) a) TB $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \|(x,y)-(v,w)\| < \delta \Rightarrow \|f(x,y)-f(v,w)\| < \varepsilon$ 2

Aangezien $\|f(x,y)-f(v,w)\| \geq 0$ en $\sqrt{\cdot}$ stijgend, volgt uit

$2\|f(x,y)-f(v,w)\|^2 = \sqrt{(x-v)^2+(y-w)^2}^2 = \|(x,y)-(v,w)\|^2 < \delta^2$

dat $\sqrt{2}\,\|f(x,y)-f(v,w)\| < \delta$. Kies nu $\delta = \varepsilon$. 3

b) Afschatting 1: $\|f(a_n,b_n)-f(a_{n-1},b_{n-1})\| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \|(a_1,b_1)-(a_0,b_0)\|$ 5

Afschatting 2: $\|(a_n,b_n)-(a_m,b_m)\| = \left(\sum_{k=m}^{n-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k\right)\|(a_1,b_1)-(a_0,b_0)\|$

$< \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^m \frac{1}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\|(a_1,b_1)-(a_0,b_0)\|$ 5

Bewijs Cauchy rij: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n,m > N: \|(a_n,b_n)-(a_m,b_m)\| < \varepsilon$ 5

c) Bewijs $\lim_{n\to\infty}(a_n,b_n)$ bestaat ($\mathbb{R}^2$ volledig, Bolzano-Weierstrass + eigenschappen Cauchy rij) 5

f continu dus $\lim_{n\to\infty} f(a_n,b_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n\right)$ 5

3 a) $A = \{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}$ 1, $A \neq \emptyset$ 1, $\text{bov}(A) \neq \emptyset$ 2; sup A bestaat 1

b) $\|f\| \geq 0$ & $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ 1

Goed gebruiken sup: bij Δ-ongelijkheid uit

$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$ 2

volgt $\|f\|+\|g\|$ is een bovengrens, dus $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)+g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$

Idem voor $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$ 2

c) B gesloten (of complement open)

Definitie verdichtingspunt (inwendig punt) 2

ε-δ redenering 3

III

d) Stel convergente deelrij

Uit insluitstelling volgt puntsgewijze limiet is nul fct ⑤

Tegenspraak afleiden uit aangezien $\|f_n\| = 1$ voor alle n ⑤

4a Noem limiet van $\{c_n\}$ c en deel voor $\varepsilon' > 0$ voldoende klein het interval op in $[a, c-\varepsilon'] \cup [c-\varepsilon', c+\varepsilon'] \cup [c+\varepsilon', b]$

$\forall \varepsilon' > 0\ \exists N\ \forall n \geq N \quad c-\varepsilon' < c_n < c+\varepsilon'$ ③

Dus op $[a, c-\varepsilon]$ en $[c+\varepsilon, b]$ is f continu (gelijk aan nul) op eindig veel punten c_n, $n = 0, 1, \ldots, N$, na

Kies ε'' zo klein dat

$$V_1 = \{a, c_n - \varepsilon'', c_n + \varepsilon'', b, \mid n = 0, \ldots, N, c_n \neq a, b, c_n \notin \overbrace{[c-\varepsilon', c+\varepsilon']}^{c-\varepsilon', c+\varepsilon'}\}$$

een verdeling van $[a, c-\varepsilon'] \cup [c+\varepsilon', b]$ is met

$$\overline{S}(f, V_1) - \underline{S}(f, V_1) < N 2\varepsilon'' < \frac{\varepsilon}{2} \text{ voor } \varepsilon'' < \frac{\varepsilon}{4N}$$ ⑤

Alternatief: gebruik stelling dat f integreerbaar is op $[a, c-\varepsilon]$ en $[c+\varepsilon, b]$ (vanwege continu met eindig veel discontinuïteiten) en dus (stelling) is er voor iedere $\varepsilon > 0$ een verdeling V_1 van $[a, c-\varepsilon] \cup [c+\varepsilon, b]$ zodat

$$\overline{S}(f, V_1) - \underline{S}(f, V_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$ ⑤

Op $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ kies de verdeling $V_2 = \{c-\varepsilon', c+\varepsilon'\}$ zodat

$$\overline{S}(f, V_2) - \underline{S}(f, V_2) = 2\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2} \text{ voor } \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{4}$$ ⑤

Dus voor $V = V_1 \cup V_2$ dan geldt

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) < \varepsilon$$

IV

4 b) We weten $\underline{\int}_a^b f(x)dx \leq \overline{\int}_a^b f(x)dx$. TB $\overline{\int}_a^b f(x)dx \leq \underline{\int}_a^b f(x)dx$ dan is f Riemann-integreerbaar ①

Uit
$$\overline{\int}_a^b f(x)dx \leq \overline{S}(f,V) < \varepsilon + \underline{S}(f,V) \leq \varepsilon + \underline{\int}_a^b f(x)dx$$ voor iedere $\varepsilon > 0$ ③

volgt
$$\overline{\int}_a^b f(x)dx \leq \underline{\int}_a^b f(x)dx$$ ①

5 (Bonus)

Teruggehaald beeld van gesloten verzameling gesloten voor een continue afbeelding ②
Bewijs dat $\{c\}$ gesloten is ①
Totaal ③

Correct volledig direct bewijs

Zij $a \in \mathbb{R}$ met $a \notin f^{-1}(\{c\})$. TB a is geen limietpunt van $f^{-1}(\{c\})$ ①

laat $b = f(a)$ dan $b \neq c$ en dus $\varepsilon := d(b,c) > 0$ en $c \notin B(b;\varepsilon)$ ②

f continu in $x=a$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ f(B(a;\delta)) \subset B(b;\varepsilon)$ ②

Dus $c \notin f(B(a;\delta))$ ③

Dus $B(a;\delta) \cap f^{-1}(\{c\}) = \emptyset$ en a geen limietpunt ②