Tussentoets Analyse

donderdag 7 juni 2018, 9:00-11:00

- Schrijf op ieder vel je naam en bovendien op het eerste vel je studentnummer, het nummer van de werkgroepl (1 t/m 4) en het aantal ingeleverde vellen.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

Succes!

1. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functies met domeinen $D(f) = \mathbb{R}$ en $D(g) = \mathbb{R}$.

(a). Zij f continu in 0 en zij g gedefinieerd door $g(x) = xf(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat g differentieerbaar is in 0 en bepaal $g'(0)$.

(b). Zij f begrensd en zij g gedefinieerd door $g(x) = x^2 f(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat g differentieerbaar is in 0 en bepaal $g'(0)$.

(c). Bewijs dat g differentieerbaar in 0 en $g(0) = 0$ dan en slechts dan als er een functie f bestaat die continu is in 0 met $g(x) = xf(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$.

2. Laat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ een continue functie. Voor $c \in \mathbb{R}^m$ is de verzameling $f^{-1}(c)$ gedefinieerd door

$$f^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}.$$

(a). Bewijs direct zonder gebruik te maken van stellingen dat $f^{-1}(c)$ een gesloten deel van $\mathbb{R}^n$ is.

(b). Laat de deelverzameling D van $\mathbb{R}^3$ gedefinieerd zijn door

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ en } x + y + z = 2\}.$$

Toon aan dat D gesloten is.

Z.O.Z.

3. De rij $(a_n)_{n\geq 1}$ wordt gegeven door

$$a_1 = 7 \quad en \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{2(a_n - 1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a). Bewijs dat $a_n > a_{n+1} > 3$ voor alle $n \geq 1$.

(b). Bewijs dat de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ convergeert en bepaal de limiet.

4. Laat (V, d_1) en (W, d_2) metrische ruimten en zij $f : V \to W$ een afbeelding van V naar W.

(a). Laat f continu in $x = a$ voor $a \in V$. Bewijs dat voor elke convergente rij $(x_n)_{n\geq 1}$ in V met limiet a, de rij $(f(x_n))_{n\geq 1}$ convergent is in W met limiet $f(a)$.

(b). Laat gegeven zijn dat voor elke convergente rij $(x_n)_{n\geq 1}$ in V met limiet a, de rij $(f(x_n))_{n\geq 1}$ convergent is in W met limiet $f(a)$. Bewijs dat de functie f continu is in $x = a$.

	1(a):7	2(a):15	3(a):15	4(a):10
Normering:	1(b):8	2(b):10	3(b):10	4(b):15
	1(c):10			