Tussentoets Analyse

dinsdag 28 mei 2019, 13:00-15:00

– Schrijf op ieder vel je naam en bovendien op het eerste vel je studentnummer, de naam van de werkgroepleider Jan Willem van Ittersum (groep 1), Jetze Zoethout (groep 2), Thomas Bakx (groep 3) of Lasse Grimmelt (groep 4 en 5) en het aantal ingeleverde vellen.

– Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.

– Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.

– Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, ga dan toch door met de volgende onderdelen. Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.

– Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

Succes!

1. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functies met domeinen $D(f) = \mathbb{R}$ en $D(g) = \mathbb{R}$.

(a). Zij f continu in 0 en zij g gedefinieerd door $g(x) = xf(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat g differentieerbaar is in 0 en bepaal $g'(0)$.

(b). Zij f begrensd en zij g gedefinieerd door $g(x) = x^2 f(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat g differentieerbaar is in 0 en bepaal $g'(0)$.

(c). Bewijs dat g differentieerbaar in 0 en $g(0) = 0$ dan en slechts dan als er een functie f bestaat die continu is in 0 met $g(x) = xf(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$.

2. Laat $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en $c < d$. Veronderstel dat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een injectieve functie is met $f([a, b]) = [c, d]$.

(a). Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu. Bewijs als $f(a) < f(b)$ dan is f monotoon strikt stijgend.

(b). Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotoon stijgend. Bewijs dat f continu is.

Z.O.Z.

3. Laat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een continue functie. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat de verzameling $f^{-1}((a,b))$ gedefinieerd zijn door

$$f^{-1}\big((a,b)\big) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in (a,b)\,\}.$$

(a). Bewijs direct zonder gebruik te maken van stellingen dat $f^{-1}((a,b))$ een open deel van $\mathbb{R}^n$ is.

(b). Zij D_k voor $k = 1, 2, \ldots$ een open verzameling. Bewijs dat de vereniging $\cup_{k\geq 1} D_k$ weer open is.

(c). Laat de deelverzameling D van $\mathbb{R}^3$ gedefinieerd zijn door

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < x + y + z\,\}.$$

Toon aan door gebruik te maken van (a) en (b) dat D een open deelverzameling van $\mathbb{R}^3$ is.

4. Zij $0 < a_1 < b_1$, en definieer met inductie de rijen

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$
$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\big(a_n + b_n\big).$$

Bewijs de volgende uitspraken:

(a). Er geldt $0 \leq a_n \leq b_n$ voor alle $n \geq 1$;

(b). De rij $(a_n)_{n\geq 1}$ is monotoon stijgend.

(c). De rij $(b_n)_{n\geq 1}$ is monotoon dalend.

(d). De limiet van de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ en van de rij $(b_n)_{n\geq 1}$ bestaat. Bovendien zijn deze limieten aan elkaar gelijk.

	1(a):7	2(a):15	3(a):15	4(a):9
Normering:	1(b):8	2(b):10	3(b):5	4(b):4
	1(c):10		3(c):5	4(c):4
				4(d):8