Analyse - Thuistentamen kort

7 april 2020, 17:30-18:30

- Onderteken na afloop van het tentamen de verklaring onderaan het tentamen en maak een scan in pdf formaat van de eigen uitwerkingen voorzien van je naam en studentnummer. Stuur de file in **pdf formaat** naar `s.m.verduynlunel@uu.nl`.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, ga dan toch door met de volgende onderdelen. Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Internet mag niet worden gebruikt.

Succes!

1. Laat de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door $f(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 4$.

(a). Bewijs dat f een inverse g heeft en bepaal het domein en beeld van g.
(b). Laat zien dat g differentieerbaar is in 1 en bepaal $g'(1)$.

2. Zij $a < b$ en laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ een continue functie die differentieerbaar is op (a, b). Definieer $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ door

$$\phi(t) = \langle f(b) - f(a), f(t) \rangle, \qquad t \in [a, b].$$

Hier is $\langle x, y \rangle$ het standard inwendig product van de vectoren $x, y \in \mathbb{R}^2$.

(a). Bewijs dat ϕ differentieerbaar op (a, b) is.
(b). Bewijs dat er een $c \in (a, b)$ bestaat zodat

$$\|f(b) - f(a)\|^2 = \phi'(c)(b - a).$$

(c). Bewijs dat er een $c \in (a, b)$ bestaat zodat

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|\big(\frac{\partial f_1}{\partial x} \ \frac{\partial f_2}{\partial x}\big)^T\|(b - a).$$

3. Laat $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de functie gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} q\sin(1/q) & \text{als} \quad x = 1/q \text{ met } q \in \mathbb{N}; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

(a). Bewijs dat voor iedere verdeling V van $[0,1]$ de ondersom $\underline{S}(f,V)$ gelijk aan nul is.

(b). Bewijs dat voor iedere $\epsilon > 0$ er een verdeling V van $[0,1]$ bestaat zodat $\overline{S}(f,V) < \epsilon$.

(c). Bewijs dat f Riemann integreerbaar is en bereken de integraal.

(d). Geef een voorbeeld van een functie met aftelbaar veel discontinuïteiten die niet Riemann integreerbaar is.

Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit tentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen, internet of van andere hulpmiddelen dan het dictaat en eigen aantekeningen.

Naam   Plaats

Normering:

1(a):10	2(a):10	2(a):10
1(b):10	1(b):10	2(b):20
	1(c):10	2(c):10
		2(d):10