Tentamen Analyse

26 juni 2018, 13:30-16:30

- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- Het aanhalen van een stelling als bewijs van een onderdeel van een opgave is niet voldoende.
- Als je in een bewijs stellingen gebruikt, laat dan ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

Succes!

1. Van een continue functie $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ is gegeven dat $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ voor $x \in (0,1)$ en tenslotte

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

(a). Bewijs aan dat er voor iedere $c > 0$ er een $a \in [0,1)$ bestaat met $f(a) > c$.

(b). Bewijs dat $f([0,1)) = [0,\infty)$.

2. Definieer de rij $(a_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}$ door $a_0 = 0$ en

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \qquad \text{voor } n \geq 1.$$

(a). Bewijs dat de rij $(a_{2n+1})_{n\geq 0}$ monotoon dalend is.

(b). Bewijs dat de rij $(a_{2n})_{n\geq 0}$ monotoon stijgend is.

(c). Bewijs dat de in (a) en (b) genoemde rijen convergent zijn.

(d). Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} \big(a_{2n+1} - a_{2n}\big) = 0.$$

(e). Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat.

Z.O.Z.

3. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en zij $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ een continue functie, differentieerbaar op het open interval (a,b).

(a). Formuleer de stelling van Rolle voor de functie h.

(b). Leid de middelwaarde stelling af uit de stelling van Rolle.

(c). Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu. Bewijs dat er een $c \in [a,b]$ bestaat zodat

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

4. Beschouw de reële genormeerde vectorruimte V van Riemann integreerbare functies $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ voorzien van de norm

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}.$$

Laat $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continu voor $n \in \mathbb{N}$ en neem aan dat er een $f \in V$ bestaat zodat

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0.$$

(a). Bewijs dat f continu is.

(b). Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Definieer de rij $(f_n)_{n\geq 0}$ in V door $f_0(x) = 0$ en $f_1(x) = x$ voor $x \in [0,1]$. En voor $n \geq 2$ door $f_n(x) = n^2 x$ voor $x \in [0, 1/n]$, $f_n(x) = -n^2 x + 2n$ voor $x \in [1/n, 2/n]$ en $f_n(x) = 0$ voor $x \in [2/n, 1]$.

(c). Bereken $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor $x \in [0,1]$ en bepaal de integraal $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(d). Toon aan dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

(e). Laat zien dat onderdeel (d) niet in tegenspraak met onderdeel (b) is.

5. (Bonusopgave.) Bepaal $p, q \in \mathbb{N}$ zodat

$$|\sqrt{101} - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{1600000}.$$

Normering:

1(a):10	2(a):5	3(a):5	4(a):10	5:10
1(b):10	2(b):5	3(b):10	4(b):5	
	2(c):5	3(c):10	4(c):5	
	2(d):5		4(d):5	
	2(e):5		4(e):5	