Tussentoets Analyse

dinsdag 10 maart 2020, 17:00-19:00

- Schrijf op ieder vel je naam. Schrijf op het het eerste vel je studentnummer en het aantal ingeleverde vellen en de werkgroep waar je bent ingedeeld (Leandro Chiarini/Andreas Tataris (groep 1), Mireia Martínez (groep 2), Joost Mein (groep 3), Thomas Koopman (groep 4), Ilmar Beyeler (groep 5) en Aldo Witten (groep 6)).
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, ga dan toch door met de volgende onderdelen. Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

Succes!

1. De rij $(a_n)_{n\geq 1}$ wordt gegeven door

$$a_0 = 1 \quad en \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a). Bewijs dat $a_{2k+1} \geq a_{2(k+1)+1}$ voor alle $k \in \mathbb{N}$.

(b). Bewijs dat $a_{2k} \leq a_{2(k+1)}$ voor alle $k \in \mathbb{N}$.

(c). Bewijs dat de rijen $(a_{2k})_{k\geq 1}$ en $(a_{2k+1})_{k\geq 1}$ convergeren.

(d). Bewijs dat de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ convergeert en bepaal de limiet.

2. Laat $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en $c < d$. Veronderstel dat $f : [a, b] \to [c, d]$ een continue bijectieve functie is met $f(a) < f(b)$.

(a). Bewijs dat f strikt monotoon stijgend is.

(b). Bewijs dat de inverse functie $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ bestaat en continu is.

3. Een metrische ruimte (V, d) heet samenhangend als $\emptyset$ en V de enige deelverzamelingen van V zijn die zowel open als gesloten zijn. De metrische ruimte V heet padsamenhangend als voor ieder tweetal punten $p, q \in V$ er een continue functie $c : [0, 1] \to V$ bestaat met $c(0) = p$ en met $c(1) = q$.

(a). Bewijs dat V niet samenhangend is dan en slechts dan als er niet-lege gesloten deelverzamelingen C_1 en C_2 van V zijn met $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ en $V = C_1 \cup C_2$.

(b). Laat $V = [0, 1]$ met $d(x, y) = |x - y|$. Laat A een niet-lege deelverzameling van V zijn. Beredeneer dat $\sup A$ bestaat en bewijs dat $\sup A$ een limietpunt van A is.

(c). Laat $V = [0, 1]$ met $d(x, y) = |x - y|$. Stel dat er gesloten deelverzamelingen C_1 en C_2 van V bestaan met $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ en $[0, 1] = C_1 \cup C_2$. Bewijs dat C_1 of C_2 gelijk aan de lege verzameling moet zijn.

(d). Bewijs dat elke padsamenhangende metrische ruimte samenhangend is.

4. Laat (V, d_1) en (W, d_2) metrische ruimten en zij $f : V \to W$ een afbeelding van V naar W.

(a). Laat f continu in $x = a$ voor $a \in V$. Bewijs dat voor elke convergente rij $(x_n)_{n\geq 1}$ in V met limiet a, de rij $(f(x_n))_{n\geq 1}$ convergent is in W met limiet $f(a)$.

(b). Laat gegeven zijn dat voor elke convergente rij $(x_n)_{n\geq 1}$ in V met limiet a, de rij $(f(x_n))_{n\geq 1}$ convergent is in W met limiet $f(a)$. Bewijs dat de functie f continu is in $x = a$.

Normering:

1(a):5	2(a):13	3(a):5	4(a):13
1(b):5	2(b):12	3(b):5	4(b):12
1(c):8		3(c):8	
1(d):7		3(d):7	