Bondige uitwerkingen Tussentoets Analyse - 10 maart 2020

door Aldo Witte

1a

Allereerst merken we op dat

$$a_{n+2} = 1 + \frac{1}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}} = 1 + \frac{a_n}{a_n + 1} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 1} = 2 - \frac{1}{a_n + 1} \tag{1}$$

We gaan de opgave bewijzen met volledige inductie. Allereerst berekenen we $a_1 = 2, a_2 = 3/2, a_3 = 5/2$. Dus $a_1 \geq a_3$ waarmee de basisstap van de inductie is bewezen. Stel nu dat voor gegeven $k \in \mathbb{N}$ geldt dat $a_{2k+1} \geq a_{2(k+1)+1}$. Nu geldt

$$\begin{aligned} a_{2(k+2)+1} &= 2 - \frac{1}{a_{2(k+1)+1} + 1} \quad \text{Vanwege (1)} \\ &\leq 2 - \frac{1}{a_{2k+1} + 1} \quad \text{Vanwege de inductie-aanname} \\ &= a_{2(k+1)+1} \quad \text{Wederom vanwege (1)} \end{aligned}$$

en dus concluderen we dat $a_{2(k+1)+1} \geq a_{2(k+2)+1}$. Hierbij hebben we het geven bewezen.

1b

We zouden dit analoog kunnen doen aan opgave 1a, maar er is een snellere manier. Merk op dat $a_{2(k+1)} = 1 + \frac{1}{a_{2k+1}}$, maar gebruikmakend van opgave 1a volgt dat $1 + \frac{1}{a_{2k+1}} \geq 1 + \frac{1}{a_{2k-1}}$. Zodoende concluderen we dat $a_{2(k+1)} \geq a_{2k}$.

1c

Allereerst merken we op dat uit de definitie van $(a_n)_{n\geq 1}$ direct volgt dat $a_n \geq 1$ voor alle $n \geq 1$. Dus is $-1/(a_n + 1)$ altijd negatief en uit (1) concluderen we dus ook dat $a_n \leq 2$. Beiden rijen $(a_{2k})_{k\geq 1}$ en $(a_{2k+1})_{k\geq 1}$ zijn dus zowel van boven als van onderen begrenst, en in opgave 1a en 1b hebben we laten zien dat $(a_{2k})_{k\geq 1}$ monotoon stijgend is en $(a_{2k+1})_{k\geq 1}$ monotoon dalend. Nu volgt uit een stelling uit het dictaat dat beiden rijen convergeren.

1d

Noem het limiet $a := \lim_{k\to\infty} a_{2k}$, nu volgt uit de substitutiestelling dat

$$a = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2(k-1)}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\lim_{k\to\infty} a_{2(k-1)}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a}}.$$

Deze vergelijking valt te reduceren tot

$$a^2 - a - 1 = 0.$$

Deze vergelijking heeft twee oplossingen

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

maar aangezien a de limiet is van een rij positieve getallen moet wel dat $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Op exact dezelfde manier kunnen we bepalen dat $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Hieruit concluderen we dat $(a_n)_{n\geq 1}$ ook moet convergeren met limiet $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (We weten dat voor all $\varepsilon > 0$ geldt dat er $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ zijn zodat voor all $k \geq N_1$ geldt $|a_{2k} - a| < \varepsilon$ en voor all $k \geq N_2$ geldt dat $|a_{2k+1} - a| < \varepsilon$. We zien dus dat voor all $n \geq 2\text{max}(N_1, N_2)$ geldt dat $|a_n - a| < \varepsilon$.)

2a

Zie het bewijs van Lemma 5.4 in het dictaat.

2b

Om aan te tonen dat f^{-1} continu is maken we gebruik van Lemma 2.30, wat zegt dat f^{-1} continu is dan en slechts dan als voor alle open verzamelingen $O \subset [a, b]$ de verzameling $f(O) \subset [c, d]$ weer open is. Laat $f(x) \in f(O)$ willekeurig zijn. Omdat O open is, is er een $\delta > 0$ zodanig dat $(x - \delta, x + \delta) \subset O$. Omdat f strikt monotoon stijgend is, is $f(x - \delta, x + \delta) = (f(x - \delta), f(x + \delta))$. Nu is $f(x) \in (f(x-\delta), f(x+\delta))$, waaruit we concluderen dat $f(O)$ open is, en dus dat f^{-1} continu is.

3a

Stel V is niet samenhangend, dan is er een $C_1 \subset V$ met $C \neq \emptyset, V$ die zowel open als gesloten is. Daarom is $C_2 := C_1^c$ ook zowel open als gesloten. We zien dat $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ en $V = C_1 \cup C_2$.
Stel $V = C_1 \cup C_2$ met C_1, C_2 niet leeg en gesloten. Omdat $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ zien we dat $C_1^c = C_2$. Het complement van C_1 is dus gesloten, en dus is C_1 open. We concluderen dat V niet samenhangend is.

3b

We merken op dat voor alle $x \in A \subset V$ geldt dat $x \geq 1$. Dus 1 is een bovengrens van V. Uit een stelling uit het dictaat volgt dan dat er een kleinste bovengrens is, welke we $\sup A$ noemen. We gaan nu bewijzen dat $\sup A$ een limietpunt is van A. Stel $\delta > 0$ willekeurig dan is $\sup A - \delta < \sup A$, aangezien $\sup A$ de kleinste bovengrens is is $\sup A - \delta$ dus geen bovengrens. Daarom is er een $a \in A$ met $a > \sup A - \delta$, anderzijds is $a \leq \sup A$. Dus $a \in (\sup A - \delta, \sup A] \subset B(\sup A; \delta)$ en daarom is $a \in B(\sup A; \delta) \cap A$ en concluderen we dat $\sup A$ een limietpunt van A is.

3c

Stel dat C_1 en C_2 beiden niet leeg zijn, dan weten we dat $\sup C_1$ en $\sup C_2$ beiden bestaan (gebruikmakend van opgave 3a). Omdat $[0,1] = C_1 \cap C_2$ moet ofwel C_1 ofwel C_2 het element 1 bevatten. Daarom geldt ofwel $\sup C_1 = 1$ of $\sup C_2 = 1$, maar aangezien C_i gesloten is geldt (gebruikmakend van opgave 3b) dat $\sup C_i \in C_i$ en aangezien $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ volgt dat $\sup C_1 \neq \sup C_2$. Stel nu, zonder verlies van algemeenheid dat $\sup C_2 = 1$, en dus $\sup C_1 < 1$. Voor all $x > \sup C_1$ geldt dat $x \notin C_1$, dus $x \in C_2$. Hieruit volgt dat voor all $\delta > 0$ het element $\sup C_1 + \frac{1}{2}\delta$ bevat is in de verzameling $B(\sup C_1; \delta) \cap C_2$. Hieruit volgt dat $\sup C_1$ een limietpunt is van C_2, maar aangezien C_2 gesloten is volgt dus dat $\sup C_1 \in C_2$. We concluderen dat $\sup C_1 \in C_1 \cap C_2$, wat tot een tegenspraak leidt.

3d

Stel dat V een metrische ruimte is die wel padsamenghangend maar niet samenhangend is. Dan bestaan er C_1, C_2 niet lege gesloten verzamelingen met $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ en $C_1 \cup C_2 = V$. Kies nu een punt $p \in C_1$ en $q \in C_2$. Omdat V samenhangend is bestaat er een pad $c : [0,1] \to V$ met $c(0) = p$ en $c(1) = q$. We merken op dat

$$[0,1] = c^{-1}(C_1 \cup C_2) = c^{-1}(C_1) \cup c^{-1}(C_2),$$

en omdat c continu is en C_1, C_2 gesloten volgt uit een stelling in het dictaat dat $c^{-1}(C_1)$ en $c^{-1}(C_2)$ gesloten zijn. Aangezien $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ volgt dat $c^{-1}(C_1) \cap c^{-1}(C_2) = \emptyset$. En omdat $c(0) = p$ is $p \in c^{-1}(C_1)$ en omdat $c(1) = q$ is $q \in c^{-1}(C_2)$. We concluderen dat $[0,1]$ niet samenhangend is, wat een tegenspraak is met opgave 3c. We concluderen dus dat elke padsamenhangende metrische ruimte ook samenhangend moet zijn.

4a

Deze opgave is Lemma 3.16 in het dictaat, het was natuurlijk niet de bedoeling dat je dit lemma bij deze opgave gebruikte.

Omdat f continu is in a bestaat voor all $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zodanig dat voor all $x \in B(a;\delta)$ geldt dat $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$. Omdat $(x_n)_{n\geq 1}$ naar a convergeert bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor all $n \geq N$, $d(x_n, a) < \delta$. Als we deze twee feiten combineren zien we dat voor alle $\varepsilon > 0$ geldt dat voor $n \geq N$, $d(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. Oftewel $(f(x_n))_{n\geq 1}$ convergeert naar $f(a)$.

4b

Stel dat f niet continu is in a, dan bestaat er een $\varepsilon > 0$ zodanig dat voor alle $\delta > 0$ er een $x_\delta \in B(a;\delta)$ bestaat zodat $d(f(a), f(x_\delta)) > \varepsilon$. Gegeven $n \in \mathbb{N}$, kies nu $x_n \in V$ zodat $x_n \in B(a; \frac{1}{n})$ en $d(f(a), f(x_n)) > \varepsilon$. Op deze manier construeren we een rijtje $(x_n)_{n\geq 1}$ in V. Omdat $\frac{1}{n}$ naar nul convergeert, convergeert $d(a, x_n)$ ook naar nul (gebruikmakende van de insluitstelling), en dus convergeert x_n naar a. Maar $d(f(a), f(x_n)) > \varepsilon$ voor all $n \geq 1$. Dit is in tegenspraak met de aanname dat $f(x_n)$ convergeert.