Herkansing Analyse

29 juni 2020, 9:00-12:00

– Werk netjes en maak iedere opgave op een apart blad.

– Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook duidelijk zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.

– Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.

– Rekenmachine, telefoon of computer mogen niet worden gebruikt.

Succes!

1. Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie met

$$m = \sup \{|f'(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} < 1.$$

(a). Laat $a_0 \in \mathbb{R}$ en definieer $a_{n+1} = f(a_n)$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$. Bewijs dat de rij $(a_n)_{n \geq 0}$ een Cauchy rij is.

(b). Bewijs dat er een $c \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat $f(c) = c$.

2. Laat a, b reële getallen met $a < b$ en $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een monotoon strikt stijgende functie.

(a). Is $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu? Bewijs deze bewering of geef een tegenvoorbeeld.

(b). Laat $f([a, b]) = [c, d]$ met c, d reële getallen en $c < d$. Bewijs dat de functie $f : [a, b] \to [c, d]$ continu is.

(c). Laat $f([a, b]) = [c, d]$ met c, d reële getallen en $c < d$. Bewijs zonder gebruik te maken van stellingen dat de inverse functie $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ bestaat en continu is.

Z.O.Z.

3. Zij $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ een continue functie.

(a). Laat $f(x) = x^2$ en $N \in \mathbb{N}$. Bewijs dat f uniform continu is op $(0, N]$.

(a). Laat $f(x) = x^2$. Bewijs dat f niet uniform continu is op $(0, \infty)$.

(c). Neem aan dat $\lim_{x\to\infty} f(x)$ bestaat. Bewijs dat f uniform continu is op $[\epsilon, \infty)$ voor iedere $\epsilon > 0$.

4. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de functie gedefinieerd door

$$f(x, y) := (x - y)(x^2 + y^2 - 1)$$

en laat $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$.

(a). Bereken de stationaire punten van f in $\mathbb{R}^2$.

(b). Laat zien dat de beperking van f tot de rand van D gerepresenteerd kan worden door de functie $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ met $g(t) = \sqrt{2}(\cos t - \sin t)$. Bepaal de extrema van g.

(c). Bepaal de extrema van f op D en geef aan of de gevonden extrema lokaal dan wel globaal zijn. Bewijs je beweringen.

Normering:				
	1(a):10	2(a):10	3(a):10	4(a): 5
	1(b):10	2(b):10	3(b):10	4(b): 5
		2(c):10	3(c):10	4(c): 10