Tentamen analyse 11-4-2022 Je mag resultaten uit het boek/hoorcolleges vrij gebruiken, zolang je ernaar verwijst en tenzij je gevraagd wordt ze opnieuw te bewijzen. Alle 10 onderdelen hebben gelijk gewicht. Begin elk van de vier opgaven op een nieuw vel!

Opgave 1.

√(a) Zij $(a_n)_{n\geq 0}$ een begrensde rij en $(b_n)_{n\geq 0}$ een convergente rij in $\mathbb{R}$ met

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Bewijs dat $(a_n b_n)_{n\geq 0}$ convergeert.

√(b) Zij V, W metrische ruimten, $f : V \to W$ uniform continu en $(a_n)_{n\geq 0}$ een Cauchy-rij in V. Bewijs vanuit de definities dat $(f(a_n))_{n\geq 0}$ een Cauchy-rij is.

√(c) Bewijs dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ niet uniform continu is.

√(d) Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbaar en f' monotoon stijgend op $\mathbb{R}$. Bewijs dat voor iedere $x \in [0,1]$ geldt dat

$$\int_0^x f(t)dt \leq f(0)x + \tfrac{1}{2}f'(1).$$

Hint: Formule van Taylor.

Opgave 2.

√ (a) Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu zodanig dat $|f(x)| \leq \gamma$ voor alle $x \in [a,b]$. Stel f is Riemann-integreerbaar. Bewijs dat $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ Lipschitz-continu is.

√(b) In (a), veronderstel bovendien dat $F([a,b]) \subset [a,b]$ (d.w.z. het beeld van F is bevat in $[a,b]$) en $\gamma < 1$. Bewijs dat er een unieke $c \in [a,b]$ bestaat zodanig dat $\int_a^c f(t)dt = c$.

Opgave 3. Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x)$.

√ (a) Bepaal de verzameling $N_0 := f^{-1}(\{0\})$ en maak een plaatje van deze verzameling. Geef aan welke delen van $\mathbb{R}^2 \setminus N_0$ padsamenhangend zijn: dit hoef je *niet* formeel te bewijzen. Bepaal voor de padsamenhangende delen van $\mathbb{R}^2 \setminus N_0$ of f daar positief of negatief is.

√(b) Bepaal de stationaire punten van f. Bewijs of dit lokale maxima, lokale minima of geen van beide zijn.

Opgave 4. Zij $a < b$. Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continu zodanig dat $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a,b]$. Definieer $g : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \\ 0 & \text{als} \quad x \notin \mathbb{Q} \cap [a,b]. \end{cases}$$

Ter herinnering: voor alle niet-lege begrensde $J \subset \mathbb{R}$ definiëren we $\sup_J f := \sup\{f(x) : x \in J\}$, $\inf_J f := \inf\{f(x) : x \in J\}$ en evenzo voor $\sup_J g$, $\inf_J g$.

√(a) Bewijs dat voor ieder segment $J := [c,d] \subset [a,b]$ met $c < d$ geldt dat $\inf_J g = 0$ en $\sup_J g = \sup_J f$. Je mag gebruiken dat $J \setminus \mathbb{Q} \neq \varnothing$ en $\overline{\mathbb{Q} \cap J} = J$.

√ (b) Bewijs dat $\underline{\int_a^b} g(x)dx = 0$ en $\overline{\int_a^b} g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. Is g Riemann-integreerbaar als $f(x) = 0$ voor alle $x \in [a,b]$? En als $f(x) = x$ voor alle $x \in [a,b]$? Bewijs je antwoorden.

Opgave 1. (a) Er bestaat een $M > 0$ zodanig dat $|a_n| \leq M$ voor alle $n \geq 0$. Zij $\epsilon > 0$, dan is er een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor alle $n > N$ geldt $|b_n| < \epsilon/M$ ($(b_n)_{n \geq 0}$ convergeert naar nul). Dus voor alle $n > N$ geldt $|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \epsilon$. (b) Zij $\epsilon > 0$. Dan bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $x, y \in V$ met $d(x, y) < \delta$ geldt $d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Voorts bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor alle $m, n > N$ geldt $d(a_m, a_n) < \delta$ ($(a_n)_{n \geq 0}$ Cauchy). Derhalve, voor $m, n > N$ geldt $d(f(a_m), f(a_n)) < \epsilon$. (c) Stel wel en zij $\epsilon > 0$. Dan is er een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ met $|x-y| < \delta$ geldt $|e^x - e^y| < \epsilon$. Dus voor zulke x, y met $x > y$ geldt: $e^y|e^{x-y} - 1| = e^y(e^{x-y} - 1) < \epsilon$. Neem $x = y + \delta/2$ en $y \in \mathbb{R}$ willekeurig dan $e^y < \epsilon/(e^{\delta/2} - 1)$, d.w.z. de exponentiële functie is begrensd (tegenspraak met feit uit diktaat). (d) Beschouw de functie $x \in [0, 1] \mapsto F(x) = \int_0^x f(t)dt$ (f differentieerbaar, dus continu, dus Riemann-integreerbaar op $[0, 1]$). De hoofdstelling van de integraalrekening impliceert dat F differentieerbaar is met afgeleide $F' = f$. Dus $F'' = f'$. De formule van Taylor (met $a = 0$) geeft dat er voor elke $x \in]0, 1]$ er een $c \in]0, 1[$ bestaat zodanig dat $F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}F''(c)x^2$ met $F(0) = 0$, $F'(0) = f(0)$. Aangezien $F'' = f'$ monotoon stijgend is geldt dat $f'(c) \leq f'(1)$.

Opgave 2. (a) Voor elke $x, y \in [a, b]$ met $x \leq y$ geldt $|F(x) - F(y)| = |\int_x^y f(t)dt| \leq \int_x^y |f(t)|dt$ (stelling diktaat) en dit is $\leq \int_x^y \gamma dt = \gamma|x - y|$ (behoud ongelijkheden onder integratie). (b) Dit volgt uit de Banach-vaste-punt-stelling en onderdeel (a).

Opgave 3. (Plaatje ontbreekt!) (a) Teken de grafiek van $y = x^2$ en $y = 2x$ die elkaar snijden in $(0, 0), (2, 4)$: dit is N_0. Identificeer 5 padsamenhangende deelverzamelingen in $\mathbb{R}^2 \setminus N_0$. Tekens langs positieve/negatieve y-as: $+/+$ en langs positieve/negatieve x-as: $+/-$. Teken in $(3, 7)$: $-$. Teken in $(1, \frac{3}{2})$: $-$. (b) Aangezien $f(x, y) = y^2 - 2xy - x^2y + 2x^3$ een polynoom is, bestaan de afgeleiden naar x, y en zijn ze gelijk aan $(-2y - 2xy + 6x^2, 2y - 2x - x^2)$ (standaard rekenregels differentiatie). Beide op nul stellen geeft $y = \frac{1}{2}x^2 + x$ en $-2y - 2xy + 6x^2 = -x^3 + 3x^2 - 2x = 0$ ofwel $x(x^2 - 3x + 2) = 0$ dus $x = 0, 1, 2$. We krijgen stationaire punten $(0, 0), (1, \frac{3}{2}), (2, 4)$. Dit zijn de *mogelijke* lokale maxima/minima. Uit het tekenschema van (a) volgt dat $(0, 0), (2, 4)$ geen lokale maxima/minima zijn. Zij D de padsamenhangende open deelverzameling van $\mathbb{R}^2 \setminus N_0$ die het punt $(1, \frac{3}{2})$ bevat. Dan is D het inwendige van de verzameling $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x, y \geq x^2, \}$. De functie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x - y, y - x^2)$ is continu, $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R}^2$ is gesloten en $X = g^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ dus X is gesloten (diktaat). Voorts is X begrensd en dus neemt f een maximum en minimum aan op X (max-min-stelling). Aangezien het teken op D gelijk is aan $-$ volgt dat het punt $(1, \frac{3}{2})$ een lokaal minimum is.

Opgave 4. (a) Merk op: $g(x) \geq 0$ voor alle $x \in J$ dus $\inf_J g \geq 0$. Er bestaat een $x \in J \setminus \mathbb{Q}$ (gegeven) waarop dus $g(x) = 0$. Derhalve $\inf_J g \leq 0$. Voor alle $x \in J$ geldt $g(x) \leq f(x) \leq \sup_J f$ dus $\sup_J g \leq \sup_J f$. Zij nu $x \in J$, te bewijzen: $f(x) \leq \sup_J g$ (dan $\sup_J f \leq \sup_J g$). Zij $(r_n \in \mathbb{Q} \cap J)_{n \geq 0}$ een rij zodanig dat $\lim_{n \to \infty} r_n = x$. Zo een rij bestaat want x is een limietpunt van $\mathbb{Q} \cap J$ (gegeven: $\overline{\mathbb{Q} \cap J} = J$). Dus volgt $f(x) = \lim_{n \to \infty} f(r_n) = \lim_{n \to \infty} g(r_n)$ (f continu). Zij $\epsilon > 0$ willekeurig, dan is er een $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat voor $n > N$ geldt $|f(x) - g(r_n)| < \epsilon$. Voor een $n > N$ volgt $f(x) = f(x) - g(r_n) + g(r_n) < \epsilon + \sup_J g$. (b) Voor elke $V = \{x_0 < \ldots < x_n\} \in \mathcal{V}([a, b])$ geldt $\underline{S}(g, V) = \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1}, x_i]} g \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$ (vanwege (a)) en $\overline{S}(g, V) = \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} g \cdot (x_i - x_{i-1}) = \overline{S}(f, V)$ (vanwege (a)). Derhalve $\underline{\int}_a^b g(x)dx = 0$ en $\overline{\int}_a^b g(x)dx = \overline{\int}_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ (f continu dus Riemann-integreerbaar). In het eerste geval $\int_a^b f(x)dx = 0$ en dus is g Riemann-integreerbaar. In het tweede geval $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \neq 0$ (hoofdstelling) dus g is niet Riemann-integreerbaar.