Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de TBC van A–Eskwadraat.
Het college NS-101b werd in 2009/2010 gegeven door Dr. F.M.C. Witte.

Speciale relativiteitstheory (NS-101b)
4 november 2009

- Het tentamen bestaat uit 3 opgaven.
- Je mag je grafische rekenmachine gebruiken en het bijgeleverde formule blad.
- Beging elke opgave op een apart vel.
- Schrijf duidelijk en vergeet nooit je naam op elk vel te zetten

Opgave 1

a Twee waarnemers A en B bewegen t.o.v. elkaar met constante snelheid $v = 0.75c$, geef van de volgende beweringen aan of ze juist zijn of niet juist.

1. De tijdsdilatatie die A ten opzichte van B heeft is gelijk aan de tijdsdilatatie van B t.o.v. A.
2. Als voor waarnemer A twee deeltjes in zij nstelsel met een snelheid van 0.75c van elkaar af vliegen, parallel aan de relatieve snelheid tussen A en B, dan wordt voor A de afstand tussen het elke δ seconden (op de klok van A) precies 1.5δc groter.

b Teken een ruimtetijd diagram van situatie 2 bij opgave 2.

c Bereken hoelang die δ seconden duren voor waarnemer B.

d Bereken hoe groot d eafstand tussen de twee deeltjes volgens waarnemer B dan is.

e Wat is dus volgens waarnemer B de toename in d eafstand, tussen de twee deeltjes, per seconde?

Opgave 2

Een deeltje met een massa M beweegt met een snelheid $v = 0.75$c ten opzichte van het stelsel van een buis van een deeltjesversneller en botst op een tweede deeltje met massa M dat met een snelheid $v = 0.5$c (weer in het stelsel van de buis) in de tegenovergestelde richting beweegt. De massa M blijft onbekend, dus alle antwoorden op de volgende vragen zijn uitdrukkingen in M.

a Bereken de totale relativistische energie-impuls vector **p**.

b bereken **p**.]$vecp$

c Bereken de energie die in het nul-impuls stelsel beschikbaar is voor de vorming van nieuwe deeltjes als deze twee deeltjes met elkaar botsen en elkaar daarbij annihileren.

d Stel er ontstaan in het nul-impuls stelsel twee fotonen en er blijft een deeltje met massa 1.5 M in rust achter. Bereken de frequenties van die fotonen.

e Ga er vanuit dat de twee fotonen in het nul-impuls stelsel parallel bewegen aan de richting van het inkomende deeltje voor de botsing. Bereken de frequenties van de fotonen in het lab.

Opgave 3

Twee bellen onstaan op t=0 in rust in het labstelsel op een afstand van 5 micrometer van elkaar tijdens een experiment waarbij een nog onbekende faseovergang plaatsvindt. Als de belletjes op t=0 ontstaan hebben ze beiden een straal van 0.5 micrometer.

a Teken een ruimtetijd diagram waarin te zien is wat er gebeurt. Kies de oorsprong van je assenstelsel zo dat die precies tussen de twee belletjes ligt op t=0.

b Bereken de snelheid van de belwanden als functie van de laboratoriumtijd t.

c Bereken het tijdstip waarop de belwanden botsen.

d Wat is op he tmoment van de botsing de relatieve snelheid van de belwanden t.o.v. elkaar in het frame van één van de belwanden?

e Stel je voor dat bij de botsing de twee botsende wanden verdwijnen. Geef een argument waarom de twee buitenste wanden gewoon ongestoord door zullen bewegen.

Formuleblad

Gamma

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Tijdsdilatatie en Lengte-contractie

$$\begin{aligned} \delta t &= \gamma(v)\delta t_0 \\ l &= \frac{1}{\gamma(v)} l_0 \end{aligned}$$

Dopplereffect

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

"Optelling van snelheden"

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

Lorentz transformatie In de standaardnotatie

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(v)(x-\beta ct), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ ct' &= \gamma(v)(ct-\beta x). \end{aligned}$$

Ruimtetijd vectoren
Een orthonormale basis $\mathbf{e}_\mu$ in de ruimtetijd voldoet aan

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i &= -1, i = 1,2,3 \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= 0, i \neq j \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_0 &= 0, i = 1,2,3 \\ \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 &= 1 \end{aligned}$$

Onder de Lorentz transformatie verandert het frame volgens

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \gamma(\mathbf{e}_1 + \frac{v}{c}\mathbf{e}_0), \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2 & \qquad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_0 &= \gamma(\mathbf{e}_0 + \frac{v}{c}\mathbf{e}_1). \end{aligned}$$

Een *event* kan worden weergegeven door een vector

$$\mathbf{X} = ct\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

Golven worden beschreven door een golf-vector $\mathbf{k}$

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \frac{\omega}{c}\mathbf{e}_0 + k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3 \\ k &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} \end{aligned}$$

m.b.v. de golfeigenschappen frequentie f en golflengte λ

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\ \omega &= 2\pi f \end{aligned}$$

Voor lichtgolven of quantumgolven van massaloze deeltjes geldt

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \quad = \quad \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \equiv 0$$

Kinematics
Laat $\mathbf{X}(\tau)$ een wereldlijn zijn en τ de eigentijd. Dan is de eigensnelheid $\mathbf{u}(\tau)$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\tau) &\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathbf{X}(\tau) \\ &= \gamma(v)\{c\mathbf{e}_0 + v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3\} \\ v &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \end{aligned}$$

De relativistische impuls van een deeltje met rustmassa m is

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= m\mathbf{u} \\ &= \frac{E}{c}\mathbf{e}_0 + p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

De relativistische energie van een deeltje met massa M

$$E = M\gamma c^2$$

De relativistische energie-impuls van een quantum-golf $\mathbf{k}$ is

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$$

Invariante massa
Als $\mathbf{p}$ de totale energie-impulsvector van een systeem vrije deeltjes is, dan is de invariant massa M van dat systeem gegeven door $M^2c^2 = \mathbf{p}^2$.
Bellen
Als R de ruststelselstraal van een bel aangeeft ten tijde van zijn ontstaan, dan voldoen de belwanden $\mathbf{x}_\mathrm{W}$ van een bel rond het centrum $\mathbf{x}_\mathrm{B}$ aan

$$(\mathbf{x}_\mathrm{B} - \mathbf{x}_\mathrm{W})^2 = -R^2.$$